Corrigé : Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (6 points)

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.

   (a) La fonction f est bien définie sur $[0;+\infty[$.
   La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. Posons,
   $u(x) = 2x$ et $v(x) = 1+2x$.
   $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2$
   Dès lors,
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{2(2x+1) - 2x \times 2}{(1+2x)^2} \\ &= \frac{2}{(1+2x)^2}. \end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

   (a) $u_1 = \dfrac{3u_0}{1+2u_0} = \dfrac{\frac{3}{2}}{1+1} = \dfrac{3}{4}$.
   $u_2 = \dfrac{3u_1}{1+2u_1} = \dfrac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}} = \dfrac{9}{4} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{9}{10}$.

   (b) Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)\ :\ 0 < u_n < 1$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $0 < u_0 < 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
   On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   De plus, par hypothèse de récurrence, on a : $0 < u_n < 1$.
   La fonction f étant croissante, on en déduit que : $f(0) < f(u_n) < f(1)$.
   Par ailleurs, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Ainsi, $0 < f(u_n) < 1$.
   L'hérédité est donc vérifiée.
   Conclusion : En appliquant le principe de récurrence, on peut affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

   (c) Première méthode : Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)\ :\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = \dfrac{3}{4}$. Donc, $u_0 \leqslant u_1$.
   En conséquence, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
   Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   La fonction f étant croissante, on en déduit que : $f(u_n) < f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
   L'hérédité est donc vérifiée.
   Conclusion : En appliquant le principe de récurrence, on peut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Autrement dit, la suite (u_n) est croissante.
   Deuxième méthode méthode : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n \\ &= \frac{3u_n}{1+2u_n} - \frac{u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} \\ &= \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2)}{1+2u_n} \\ &= \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}. \end{aligned}$$
   Or, selon la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$. Donc, $1 - u_n > 0$ et par conséquent $\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est croissante.

Exercice 1 : (suite)

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} \\
&= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} \\
&= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1+2u_n}{1+2u_n}-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} \\
&= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1-u_n}{1+2u_n}} \\
&= \frac{3u_n}{1-u_n} \\
&= 3v_n.
\end{aligned}$$

   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$.

   (c) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \quad &\Leftrightarrow \quad v_n = \frac{u_n - 1 + 1}{1-u_n} \\
&\Leftrightarrow \quad v_n = -1 + \frac{1}{1-u_n} \\
&\Leftrightarrow \quad v_n + 1 = \frac{1}{1-u_n} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{v_n+1} = 1 - u_n \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{v_n+1} = u_n \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{v_n}{v_n+1} = u_n.
\end{aligned}$$

   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n$. Donc, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

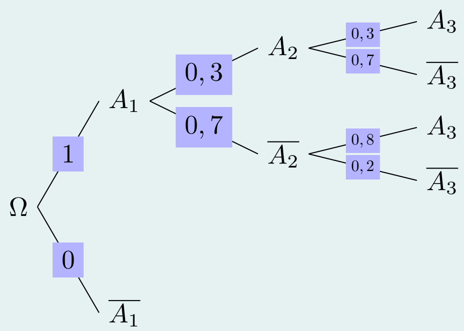
   (d) $3 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n + 1 = +\infty$. Nous avons donc une forme indéterminée.

   Par ailleurs, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1} = \dfrac{3^n}{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^n}}$.

   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$. En conséquence, par somme et par quotient, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 2 : (5 points)

Cette situation peut être représentée par un arbre de probabilité.

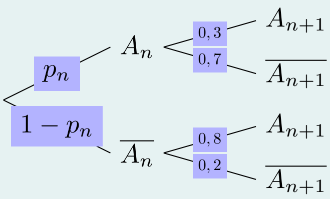


Exercice 2 : (suite)

1. On a : $p_2 = P(A_2) = 0,3$.
   Les deux événements A_3 et $\overline{A_3}$ forment une partition de l'univers, en effet, $\Omega = A_3 \cup \overline{A_3}$.
   En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} p_3 & = & P(A_3) \\ & = & P(A_3 \cap A_2) + P(A_3 \cap \overline{A_2}) \\ & = & P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ & = & 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,8 \\ & = & 0,09 + 0,56 \\ & = & 0,65. \end{array}$$

2. Ci-après l'arbre de probabilité demandé :



3. Les deux événements A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de l'univers, en effet, $\Omega = A_n \cup \overline{A_n}$.
   En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} p_{n+1} & = & P(A_{n+1}) \\ & = & P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) \\ & = & P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ & = & 0,3 \times p_n + (1 - p_n) \times 0,8 \\ & = & 0,8 - 0,5p_n. \end{array}$$

4. Pour tout entier naturel $n > 0$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)\ :\ p_n = \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{8}{15}$.

   Initialisation : Pour $n = 1$, $\dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{1-1} + \dfrac{8}{15} = \dfrac{7}{15} + \dfrac{8}{15} = 1$ et $p_1 = 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
   D'après la question précédente on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl} p_{n+1} & = & 0,8 - 0,5p_n \\ & = & 0,8 - 0,5\left(\dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{8}{15}\right) \quad \text{par H.R.} \\ & = & 0,8 + \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n} - \dfrac{4}{15} \\ & = & \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n} + \dfrac{12}{15} - \dfrac{4}{15} \\ & = & \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n} + \dfrac{8}{15}. \end{array}$$

   L'hérédité est donc vérifiée.

   Conclusion : En appliquant le principe de récurrence, on peut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{8}{15}$.

5. (a) $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

   Par produit et somme de limites, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{8}{15}$.

   (b) À long terme, Maria achètera 8 baguettes toutes les deux semaines.

Exercice 3 : (3 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points suivants : $A(-4\,;1\,;2)$, $B(-1\,;2\,;\ 5)$, $C(1\,;0\,;6)$ et $E(0\,;0\,;2)$.

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-4)\\2-1\\5-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-(-4)\\0-1\\6-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$.

   De plus, $\dfrac{3}{5} \neq \dfrac{1}{-1}\left(\neq \dfrac{3}{4}\right)$. Ainsi, les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. Autrement dit, les points les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan.
2. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donnée par :

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}.$$

3. Démontrer que le point $D(-3\,;-4\,;1)$ appartient au plan (ABC) revient à démontrer l'existence de deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Résolvons donc le système :

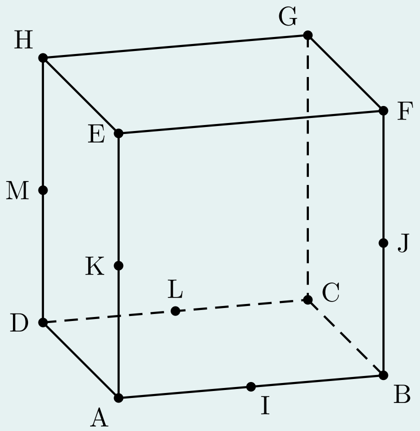
$$\begin{cases} 1 = 3a + 5b & L_1 \\ -5 = a - b & L_2 \\ -1 = 3a + 4b & L_3 \end{cases}.$$

   La combinaison linéaire $L_1 - L_3$ entraine $2 = b$.
   Et, par substitution dans l'équation L_2, on obtient : $-5 = a - 2$, soit $a = -3$. Une vérification s'impose dans les deux autres équation.
   On déduit alors que, $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. En conséquence, $D \in (ABC)$.

Exercice 4 : (3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1. Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



<u>Affirmation 1</u> est vraie. En effet, en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JH} &= \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad \text{car, } \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC} \quad \text{car, } \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH} \text{ et I est le milieu de [BA]} \\
&= 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB} \quad \text{car, M est le milieu de [DH].}
\end{aligned}$$

<u>Affirmation 2</u> est fausse. En effet, en utilisant la règle du parallélogramme dans le rectangle $ABGH$, on obtient :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.$$

Ainsi, les vecteurs du triplet $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AH}},\ \overrightarrow{\text{AG}}\right)$ sont coplanaires. Ils ne forment donc pas une base de l'espace.

Exercice 4 : (suite)

- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère : les points A(2 ; 0 ; −1) et B(5 ; −3 ; 7). On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= -12+2k \\ y &= 6 \\ z &= 3-5k \end{cases}, \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

— Les droites (AB) et (d) sont-elles parallèles ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Or, $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{0}{-3} \neq \left(\dfrac{-5}{8}\right)$, donc les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont non colinéaires. Autrement dit, les deux droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

— Les droites (AB) et (d) sont-elles sécantes ?

Une équation droite paramétrique de (AB) est donnée par :

$$\begin{cases} x &= 2+3k' \\ y &= -3k' \\ z &= -1+8k' \end{cases}, \text{où } k' \in \mathbb{R}.$$

Résolvons le système d'équations :

$$\begin{cases} -12+2k = 2+3k' \\ 6 = -3k' \\ 3-5k = -1+8k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k-3k' = 14 & L_1 \\ k' = -2 & L_2 \\ \quad 5k+8k' = 4 & L_3 \end{cases}.$$

Par substitution dans l'équation de la ligne L_1, on obtient : $2k+6=14$, soit $k=\dfrac{14-6}{2}=4$.

Et, par substitution dans l'équation de la ligne L_3, on obtient : $5k-16=2$, soit $k=\dfrac{4+16}{5}=4$.

Le résultat est cohérent ! En conséquence, les deux droites (d) et (AB) sont sécantes.

<u>Affirmation 3</u> est ainsi fausse. Les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles mais elles sont pas sécantes donc elles sont bel et bien coplanaires.

Exercice 5 : (3 points)

Soit X dont la loi est donnée par :

x_i	-2	0	1	5
$p(X=x_i)$	0,2	0,6	0,1	0,1

1. L'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i \times P(X=x_i) \\ &= x_1 \times P(X=x_1)+x_2 \times P(X=x_2)+x_3 \times P(X=x_3)+x_4 \times P(X=x_4) \\ &= -2 \times P(X=-2)+0 \times P(X=0)+1 \times P(X=1)+5 \times P(X=5) \\ &= -2 \times 0,2+0 \times 0,6+1 \times 0,1+5 \times 0,1 \\ &= 0,2. \end{aligned}$$

Variance de X :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{4}(x_i-E(X))^2 \times P(X=x_i) \\ &= (-2-0,2)^2 \times P(X=-2)+(0-0,2)^2 \times P(X=0)+(1-0,2)^2 \times P(X=1)+(5-0,2)^2 \times P(X=5) \\ &= 3,36. \end{aligned}$$

Exercice 5 : (suite)

2. Soit x un nombre réel et la variable aléatoire $Y = (X - x)^2$.
   (a) On a : $P(X = x_i) = P(X - x = x_i - x) = P((X - x)^2 = (x_i - x)^2) = P(Y = y_i)$ avec $y_i = (x_i - x)^2$.
   Ainsi, la loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

y_i	$(-2-x)^2$	$(0-x)^2$	$(1-x)^2$	$(5-x)^2$
$p(Y = y_i)$	0,2	0,6	0,1	0,1

   Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} E(Y) & = & E(X-x)^2 \\ & = & E(X^2 - 2xX + x^2) \\ & = & E(X^2) - 2xE(X) + x^2 \\ & = & E(X^2) - (E(X))^2 + (E(X))^2 - 2xE(X) + x^2 \\ & = & V(X) + (E(X))^2 - 2xE(X) + x^2 \\ & = & 3,36 + 0,2^2 - 0,4x + x^2 \\ & = & x^2 - 0,4x + 3,4. \end{array}$$

   (b) On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = x^2 - 0,4x + 3,4$..
   La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme de degré 2. Ainsi,

$$\phi'(x) = 2x - 0,4.$$

   De plus, $\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 0,4 = 0 \Leftrightarrow x = 0,2$. On déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		0.2		$+\infty$
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	
ϕ	$+\infty$	$\searrow$	3.36	$\nearrow$	$+\infty$

   Ainsi, $E(Y)$ atteint sa valeur minimale lorsque $x = 0,2$.
   (c) La valeur minimale de $E(Y)$ est donc 3,36.