Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (6 points)

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{3x}{1+2x}$.
   (a) Dire pourquoi la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis calculer $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variation de f.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}.$$
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $0<u_n<1$.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (d) La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
   (b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\dfrac{3^n}{3^n+1}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 : (5 points)

Chaque jour Maria doit décider si elle achète du pain ou non.

— Si elle a acheté du pain un jour, la probabilité qu'elle en achète le lendemain est 0,3 (parce qu'il lui en reste parfois du jour précédent ou qu'elle n'en a simplement pas envie ce jour-là).

— Si elle n'a pas acheté de pain un jour, la probabilité qu'elle en achète le lendemain est 0,8.

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle A_n l'évènement « Maria achète du pain le n^{e} jour » et on note $p_n=P(A_n)$. Aujourd'hui (le 1$^{\text{er}}$ jour), Maria a acheté du pain, ainsi $p_1=1$.

1. Calculer p_2 et p_3.
2. Représenter la situation par un arbre sur lequel figurent les évènements A_n, $\overline{A_n}$, A_{n+1} et $\overline{A_{n+1}}$.
3. Montrer que $p_{n+1}=0{,}8-0{,}5p_n$.
4. Montrer que $p_n=\dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{8}{15}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
5. (a) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$.
   (b) Interpréter concrètement le résultat de la question précédente.

Exercice 3 : (3 points)

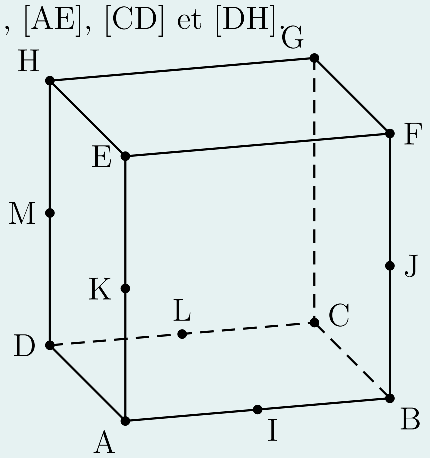
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points suivants : $A(-4\,;1\,;2)$, $B(-1\,;2\,;\ 5)$, $C(1\,;0\,;6)$ et $E(0\,;0\,;2)$.

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
3. Démontrer que le point $D(-3\,;-4\,;1)$ appartient au plan (ABC).

Exercice 4 : (3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1. Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{\mathrm{JH}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BI}} + \overrightarrow{\mathrm{DM}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}}$. »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AH}},\ \overrightarrow{\mathrm{AG}}\right)$ est une base de l'espace. »

- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère : les points A$(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et B$(5\ ;\ -3\ ;\ 7)$.
  On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

Exercice 5 : (3 points)

Soit X dont la loi est donnée par :

x_i	-2	0	1	5
$p(X = x_i)$	0,2	0,6	0,1	0,1

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Soit x un nombre réel et la variable aléatoire $Y = (X - x)^2$.
   (a) Après avoir déterminé la loi de probabilité de Y, exprimer $E(Y)$ en fonction de x.
   (b) Pour quelle valeur de x le résultat de $E(Y)$ est-il minimal ?
   (c) Calculer la valeur de ce minimum.

Bon courage !