

DEVOIR MAISON N°1

Exercice 1 : (5 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
(b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq n + 3.$$

- (b) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

- (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
(b) En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + n.$$

- (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ et } T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

- (a) Exprimer S_n en fonction de n .
(b) Déterminer la limite de la suite (T_n) .

Exercice 2 : (5 points)

1. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(1; -1; -1)$, $B(5; 0; -3)$, $C(2; -2; -2)$ et $D(0; 5; -2)$.
(a) Montrer que les points A , B et C définissent un plan.
(b) Le point D appartient-il à ce plan ?
2. Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ .
(b) Le point $M(-3; 4; 1)$ appartient-il à la droite Δ ?
(c) Donner les coordonnées de trois points de la droite Δ .
(d) Déterminer une autre représentation paramétrique de Δ .

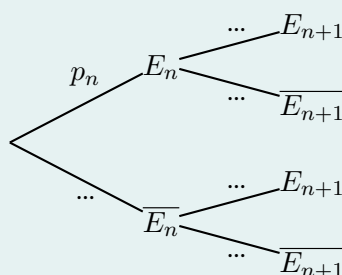
► Exercice 3 : (5 points)

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement "le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine". On note p_n la probabilité de l'évènement E_n . On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



- (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
- (c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r .
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
- (d) En déduire la limite de la suite (p_n) .

