Devoir Maison n°2

Exercice 1 : (6 points)

Pour un réel a strictement positif quelconque, on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & > 0 \\ u_{n+1} & = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. Compléter la fonction Python suivante afin que l'instruction : heron(4,7,20) retourne les $n+1$ premiers termes de la suite (u_n).

```
def heron(a,u,n):
    if u <=0:
        return "Le premier terme doit être strictement positif."
    elif a <= 0:
        return "La valeur de 'a' doit être strictement positive."
    else:
        L = [ ... ]
        k = 0
        while k < ...:
            u = ...
            L.append(...)
            k = ...
        return ...
```

2. L'instruction renvoie alors la liste suivante:
[7, 3.7857142857142856, 2.4211590296495955, 2.0366301688743387, 2.0003294091613366, 2.0000000271231317, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0]
Faites deux conjectures à partir de ces valeurs.
On se propose d'étudier mathématiquement la suite (u_n) pour une valeur de $a > 0$.
Pour cela, on introduit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

3. Calculer $f'(x)$, puis donner les variations de f sur $]0;+\infty[$ en fonction de a.
4. En déduire que $u_1 \geqslant \sqrt{a}$, quelle que soit la valeur de $u_0 > 0$.
5. Montrer que pour tout réel $x \geqslant \sqrt{a}$, $f(x) \leqslant x$.
6. Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
7. Déduire que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
8. Déterminer alors la limite de (u_n).

Exercice 2 : (4 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$; $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. En déduire le sens de variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
3. Montrer que $f'(x) = g(x) - 2$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;1]$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Bon courage !