

Question 1 : (1 point)

$$y' + \pi y = 0 \Leftrightarrow y' = -\pi y \quad (E)$$

L'équation différentielle (E) s'écrit sous la forme $y' = ay$ avec $a = -\pi$.

Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par $f(x) = Ce^{-\pi x}$ où C est une constante appartenant à $\mathbb{R}$.

Question 2 : (1 point)

$$y' - \sqrt{3}y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y' = \sqrt{3}y + \frac{1}{2} \quad (E)$$

L'équation différentielle (E) s'écrit sous la forme $y' = ay + b$ avec $a = \sqrt{3}$ et $b = \frac{1}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par $f(x) = Ce^{\sqrt{3}x} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$, soit $f(x) = Ce^{\sqrt{3}x} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ où C est une constante appartenant à $\mathbb{R}$.

Question 3 : (1 point)

Résolvons d'abord l'équation homogène associée à l'équation différentielle suivante :

$$y' + 5y = -2x. \quad (E)$$

L'équation homogène s'écrit sous la forme $y' = ay$ avec $a = -5$. Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par : $f(x) = Ce^{-5x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Cherchons à présent une solution particulière, de l'équation différentielle (E), sous la forme $g(x) = ax + b$.
Dès lors,

$$\begin{aligned} g'(x) + 5g(x) &= a + 5(ax + b) \\ &= 5ax + a + 5b \\ &= -2x. \end{aligned}$$

$$\text{Ce qui implique que } \begin{cases} 5a = -2 \\ a + 5b = 0 \end{cases} \text{ soit, } \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = \frac{2}{25} \end{cases} \text{ Ainsi, } g(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{25}.$$

En conséquence, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par : $Ce^{-5x} - \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Question 4 : (1 point)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = 2y - x^3 \quad (E)$$

On a d'une part :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{4}x + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Et, d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
2g(x) - x^3 &= 2 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} \right) - x^3 \\
&= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} - x^3 \\
&= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $g'(x) = 3g(x) - x^3$. Autrement dit, g est bel et bien une solution particulière de (E).

Question 5 : (1 point)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + 5y = 2 \cos(x). \quad (\text{E}')$$

On pose $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$.

La fonction f est une solution particulière de (E') si et seulement si $f'(x) + 5f(x) = 2 \cos(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
-a \sin(x) + b \cos(x) + 5(a \cos(x) + b \sin(x)) &= 2 \cos(x) \Leftrightarrow (5a + b) \cos(x) + (5b - a) \sin(x) = 2 \cos(x) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = 2 \\ 5b - a = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = 2 \\ 5b = a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 25b + b = 2 \\ 5b = a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{13} \\ a = \frac{5}{13}. \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Question 6 : (1 point)

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x) dx \\
&= -\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + C, \text{ où } C \text{ est une constante appartenant à } \mathbb{R},
\end{aligned}$$

est **une** primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -5x^2 + 3x + \frac{1}{2}$.

Question 7 : (1 point)

La fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int g(x) dx \\
&= -e^{-x} - \ln(x) + C, \text{ où } C \text{ est une constante appartenant à } \mathbb{R},
\end{aligned}$$

est **une** primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = e^{-x} - \frac{1}{x}$.

Question 8 : (1 point)

↪ Posons : $u(x) = x^2 + 2x + 5$. On a alors, $u'(x) = 2x + 2$. Dès lors,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x+1}{x^2+2x+5} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}. \end{aligned}$$

↪ Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 5$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16$.

Δ étant < 0 ce trinôme n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$ et son signe est le même que celui de son coefficient principal 1, soit strictement positif.

En conséquence, la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} H(x) &= \int h(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(u(x)) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) + C, \text{ où } C \text{ est une constante appartenant à } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est **une** primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}$.

Question 9 : (1 point)

Posons : $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. Ainsi, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

En calculant la dérivée de la fonction F bien définie, continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ (comme produit et somme de fonctions bien définies, continues et dérivables sur $]0 ; +\infty[$), on obtient :

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 1 \\ &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x). \end{aligned}$$

On déduit alors que F est bel et bien une primitive de $f(x) = \ln(x)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(x) dx &= [F(x)]_1^e \\ &= F(e) - F(1) \\ &= e \times \ln(e) - e - (1 \times \ln(1) - 1) \\ &= e - e + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Question 10 : (1 point)

Posons : $u(x) = e^x + x + 1$.

u est une fonction bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une somme de fonctions bien définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $u'(x) = e^x + 1$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1} dx &= \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)} dx \\ &= [\ln(u(x))]_0^1 \\ &= \ln(u(1)) - \ln(u(0)) \\ &= \ln(e + 2) - \ln(e^0 + 1) \\ &= \ln\left(\frac{e + 2}{2}\right).\end{aligned}$$