Dérivation & Convexité

Terminale Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Dérivation

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

On dit que f est *dérivable* en a si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est une limite réelle finie ℓ.

ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.

Par extension, on dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point a de I. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est alors appelée *fonction dérivée de f*.

Propriété

Si f est une fonction définie et dérivable en a alors elle est continue en a.

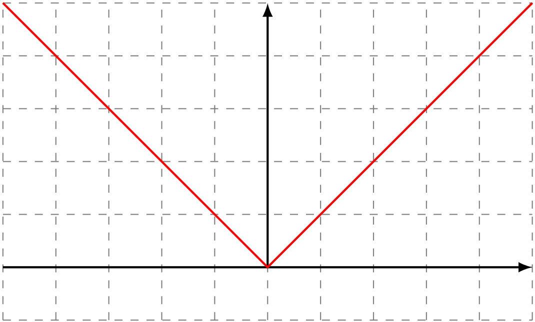
Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse : une fonction peut être continue sans être dérivable.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0 car :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +1.$$



Théorème

Soit u et v deux fonctions (vérifiant les conditions de définition requises) dérivables de dérivées respectives u et v, alors la fonction $f = v \circ u$ est dérivable et sa dérivée s'écrit :

$$f'(x) = (u \circ v)(x) = u'(x) \times v'\big[u(x)\big].$$

Exemple

On considère les deux fonctions définies par $u(x) = 2x^2 - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

On sait que : $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Dès lors, $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 4x \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 - 3}}$.

Propriétés

- Si v et u sont de même monotonie, autrement dit toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, alors la fonction $v \circ u$ est croissante.
- Si v et u sont de monotonie contraire, autrement dit l'une croissante et l'autre décroissante, alors la fonction $v \circ u$ est décroissante.

Attention !

En général, $u \circ v \neq v \circ u$. On dit que la composée de fonctions n'est pas commutative.

Propriétés

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée	Condition
u^2	$2u'u$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$ sur I
e^u	$u'e^u$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I
u^n	$nu'u^{n-1}$	
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	

Example

Exemple Soit $f(x) = e^{x^2}$.
On peut écrire $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$.
Ainsi, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée f' soit elle aussi dérivable sur I.
On appelle *dérivée seconde de* f la dérivée de la dérivée de f, et on la note f''.

Exemple

Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = \left(3x^2\right)' = 6x$.

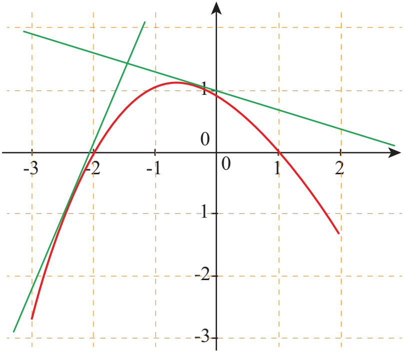
II. Convexité d'une fonction

Définition

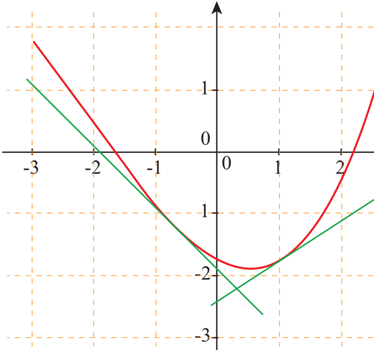
On dit que f est *concave* sur un intervalle I si $f''(x) < 0$ sur I.
On dit que f est *convexe* sur un intervalle I si $f''(x) > 0$ sur I.

Interprétation graphique :

- la courbe représentative d'une fonction *convexe* sur un intervalle I sera toujours *au-dessus* de ses tangentes ;
- la courbe représentative d'une fonction *concave* sur un intervalle I sera toujours *en dessous* de ses tangentes.



Fonction concave sur $[-3\ ;\ 2]$

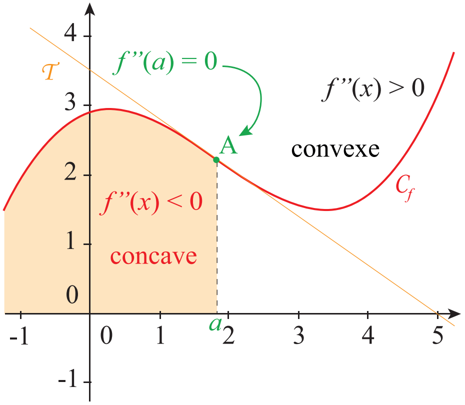


Fonction convexe sur $[-3\ ;\ 2]$

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et soit $a \in I$. On dit que le point de coordonnées $\left(a\ ;\ f(a)\right)$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.

Graphiquement, cela se traduit par un changement de convexité en a.



Exemple

Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f''(x) = 6x$ et :

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$;
- $f''(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$;
- $f''(x) = 0$.

Donc le point de coordonnées $(0\ ;\ f(0))$, c'est-à-dire l'origine du repère, est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.