Vecteurs, droites et plans de l'espace

Terminale Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Droite dans l'espace

Propriété

Toute droite $\mathcal{D}$ de l'espace est définie par un point A et un vecteur $\vec{u}$.
On dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite.
$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

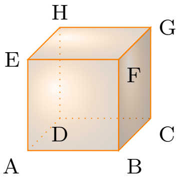
$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Définition

- Deux vecteurs de l'espace sont dits *colinéaires* s'ils ont la même direction.
- Deux droites de l'espace sont dites *parallèles* si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Exemple

Dans le cube ci-dessus, les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles bien qu'elles ne se coupent pas.



II. Plan dans l'espace

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{w}$ est une *combinaison linéaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existent deux réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

Propriété

Tout plan de l'espace est défini par un point A et un couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{u}, \vec{v})$.
On dit que le plan est dirigé par le couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque

Pour tout point M du plan défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition

Soit un plan défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

- $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé une *base* du plan.
- $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé un *repère* du plan.

Propriété

Soient deux plans de l'espace $\mathcal{P}_1$, dirigé par $(\vec{u_1}, \vec{v_1})$, et $\mathcal{P}_2$, dirigé par $(\vec{u_2}, \vec{v_2})$.
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ d'une part, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ d'autre part, sont colinéaires.

III. Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

Définition

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace non deux à deux colinéaires sont dits *coplanaires* si l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

Propriété

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace il existe un triplet unique de réels $(a\ ;b\ ;c)$ tel que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Définition

Un repère de l'espace est défini par un point A et un triplet de 3 vecteurs non coplanaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Propriété

Dans le repère $(A\ ;\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique de réels $(x\ ;y\ ;z)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Définition : Coordonnées d'un point et d'un vecteur de l'espace

Dans le repère $(A\ ;\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, si un point M est tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ alors $(x; y; z)$ constitue les coordonnées du point M, mais aussi du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans ce repère.

III. Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

Définition

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace non deux à deux colinéaires sont dits *coplanaires* si l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

Propriété

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace il existe un triplet unique de réels $(a\ ;b\ ;c)$ tel que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Définition

Un repère de l'espace est défini par un point A et un triplet de 3 vecteurs non coplanaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Propriété

Dans le repère $(A\ ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique de réels $(x\ ;y\ ;z)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Définition : Coordonnées d'un point et d'un vecteur de l'espace

Dans le repère $(A\ ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, si un point M est tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ alors $(x; y; z)$ constitue les coordonnées du point M, mais aussi du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans ce repère.

Les calculs sur les coordonnées dans l'espace se font comme les calculs sur les coordonnées dans le plan.

IV. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

L'espace est muni d'un repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A\ ;y_A\ ;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(a\ ;b\ ;c)$.

$$M(x;y;z)\in\mathcal{D} \iff \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

C'est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Cette représentation paramétrique n'est pas unique et dépend du vecteur directeur et du point choisi sur la droite.

Exemple

La droite caractérisée par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-t \\ z = 5+7t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

passe par le point $A(-1;2;5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}$.

Exemple

Point d'intersection de deux droites Deux droites (d) et (d') ont pour représentations paramétriques respectives :

$$(d) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -2 - 4t \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R} \qquad ; \qquad (d') : \begin{cases} x = 4 - 3t' \\ y = 16 - 5t' \\ z = -22 + t' \end{cases} \quad , \ t' \in \mathbb{R}$$

Sont-elles sécantes ?

Notons I l'éventuel point d'intersection de ces droites. Alors,

$$\exists t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x_I = -1 + t \\ y_I = 6 + 2t \\ z_I = -2 - 4t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \exists t' \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x_I = 4 - 3t' \\ y_I = 16 - 5t' \\ z_I = -22 + t' \end{cases} \quad .$$

Il faut donc voir si le système :

$$\begin{cases} -1 + t = 4 - 3t' \\ 6 + 2t = 16 - 5t' \\ -2 - 4t = -22 + t' \end{cases}$$

admet une solution.

Pour le savoir, il faut prendre uniquement deux équations sur les trois :

$$\begin{cases} -1+t=4-3t' \\ 6+2t=16-5t' \end{cases} \iff \begin{cases} t+3t'=5 \\ 2t+5t'=10 \end{cases}$$

et résoudre le système ; on trouve ici : $t=5$ et $t'=0$.
On doit ensuite vérifier que la troisième équation est vérifiée pour ces valeurs :

$$-2-4t=-22+t' \iff -2-4\times 5=-22+0 \iff -22=-22.$$

C'est donc ici le cas. Par conséquent, les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection est obtenu par exemple en prenant $t'=0$ dans la représentation paramétrique de (d') : il s'agit du point de coordonnées $(4;16;-22)$.

IV. Représentation paramétrique d'un plan

Propriété

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère le plan $\mathcal{P}$ de repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$. Le point A a pour coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(a\,;b\,;c)$ et $(a'\,;b'\,;c')$.
Alors le système :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{cases} \quad , \quad (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$$

est appelé une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

Exemple

Le plan caractérisé par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 7\lambda - 2\mu \\ y = 1 - \lambda + 2\mu \\ z = 7 + 5\lambda - \mu \end{cases} \quad , \quad (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$$

passe par le point de coordonnées $(-3;1;7)$ et a pour vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.