Orthogonalité & Distances dans l'espace

Terminale Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Produit scalaire

Le produit scalaire a été défini en classe de 1$^{\text{re}}$ dans le plan. Sa définition reste inchangée dans l'espace.

Définition

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, est défini par :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

Les propriétés sur le produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan.

Propriété

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (propriété de symétrie) ;
- $\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$;
- $\forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \left(\lambda\overrightarrow{u}\right) \cdot \left(\mu\overrightarrow{v}\right) = \lambda\mu\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$.

Les propriétés faisant intervenir les coordonnées change afin d'intégrer la troisième composante.

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$, c'est-à-dire où $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} = 0$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$. On a alors,
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -1 \times 3 + 2 \times 5 + 1 \times (-7) = -3 + 10 - 7 = 0.$

Définition

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exemple

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ donc les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Définition

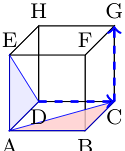
Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur de l'espace.
On dit que $\overrightarrow{n}$ est un **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ si, pour tout vecteur $\overrightarrow{p}$ de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{p} = 0$.

Définition

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH, les deux vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux. Par ailleurs, $\overrightarrow{CG}$ est un vecteur normal à (ABC) et $\overrightarrow{DC}$ un vecteur normal à (ADE). Ainsi, les plans (ABC) et (ADE) sont perpendiculaires.



Définition

Soient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace.
On dit que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont orthogonaux si tout vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de $\mathcal{P}_1$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de $\mathcal{P}_2$.

Propriété

Soient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace, de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

$$\mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sont orthogonaux} \iff \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0.$$

Cette dernière propriété sera très utilisée pour démontrer l'orthogonalité de deux plans.

Propriété

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$. Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a alors, pour tout point $M(x; y; z)$ l'espace, $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0, \quad$ où $d \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout point M du plan, on a :
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Leftrightarrow$
$ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0.$
D'où la forme annoncée.

Définition

« $ax + by + cz + d = 0$ » est appelée une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Remarque

Pour un triplet donné $(a; b; c)$, il existe une infinité d'équations cartésiennes car $d \in \mathbb{R}$.

Exemple

Donner de deux façons différentes l'équation cartésienne du plan passant par le point $A(-1;2;3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Méthode n°1 : L'équation est de la forme $2x-3y+z+d=0$ et le plan passe par le point A, d'où : $2(-1)-3\times 2+3+d=0$ ce qui donne l'équation $2x-3y+z+5=0$.

Méthode n°2 :
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0 \Leftrightarrow 2(x-(-1))+(-3)(y-2)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-3y+z+5=0$.

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathcal{P} : 2x + 3y - z + 5 = 0$$
$$\mathcal{P}' : x + y + 1 = 0$$

Nous souhaitons déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de ces deux plans si elle existe.
Pour cela, on « résout » le système suivant, en conservant une inconnue et en la considérant comme un paramètre (ici, z) :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z & = -5 \\ x + y & = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y & = z - 5 \quad L_1 \\ 2x + 2y & = -2 \quad L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y & = z - 3 \quad L_1 - L_2 \\ x & = -1 - (z - 3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y & = z - 3 \\ x & = -z + 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

L'intersection des deux plans existe et est la droite passant par le point $A(2; -3; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(0; 1; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

1. **On vérifie d'abord que $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ se coupent en un point.**
   Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$; donc,
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n} = 5\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 3 = 2 \neq 0$ donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$: il y a donc un point unique d'intersection. Appelons-le I.
2. **Déterminons les coordonnées de I.**
   La représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :
   $$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
   Étant donné que I appartient à $\mathcal{D}$, il existe un réel k tel que $I(k; 1; 3k + 3)$.
   En substituant les valeurs de x, y et z en fonction de k dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on a :
   $$\begin{aligned} & 5k + 1 - (3 + 3k) + 3 = 0 \\ \iff\ & 2k + 1 = 0 \\ \iff\ & k = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
   Finalement, on a : $I\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$.

II. Distances

Propriété

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$. Soient deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. La distance entre A et B est donnée par l'égalité :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Démonstration

$AB = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}.$

Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, et soit A un point quelconque de l'espace.
Soit (d) la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$; elle coupe $\mathcal{P}$ en un point H. H est appelé le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Propriété

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, et soit A un point quelconque de l'espace. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Alors, H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

Démonstration

Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
Supposons qu'il existe un point K du plan $\mathcal{P}$ plus proche de A que l'est le point H.
$KA \leqslant HA$ car K est le point de la droite le plus proche de A. Donc $KA^2 \leqslant HA^2$.
Or, (AH) est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc (AH) est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$. En particulier, (AH) est perpendiculaire à (HK).
Le triangle AHK est donc rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$HA^2 + HK^2 = AK^2.$$

Ainsi,

$$HA^2 + HK^2 \leqslant HA^2.$$

Donc $HK \leqslant 0$, ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point A.

Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point quelconque de l'espace. La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est :

$$d\left(\mathrm{A}\,;\,\mathcal{P}\right) = \frac{|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Démonstration

Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Alors, (AH) est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc admet pour vecteur directeur un vecteur normal à ce plan, soit $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ et donc (AH) a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_{\mathrm{A}} + at \\ y = y_{\mathrm{A}} + bt \\ z = z_{\mathrm{A}} + ct \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

H étant le point d'intersection de cette droite et de $\mathcal{P}$, on a :

$$a\left(x_{\mathrm{A}} + at\right) + b\left(y_{\mathrm{A}} + bt\right) + c\left(z_{\mathrm{A}} + ct\right) + d = 0\ ,\ \text{soit : } t = -\frac{ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On a alors :

$$\mathrm{AH}^2 = \left(x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(y_{\mathrm{H}} - y_{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(z_{\mathrm{H}} - z_{\mathrm{A}}\right)^2$$

$$\mathrm{AH}^2 = \frac{\left(ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d\right)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\mathrm{AH} = \frac{|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$