Limites & Continuité d'une fonction

Terminale Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Limites

Définition

La limite d'une fonction f en $-\infty$ (resp. $+\infty$) est la valeur (si elle existe) vers laquelle se rapproche $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).
On la note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$).
Cette limite, quand elle existe, peut être un nombre réel ou un infini.

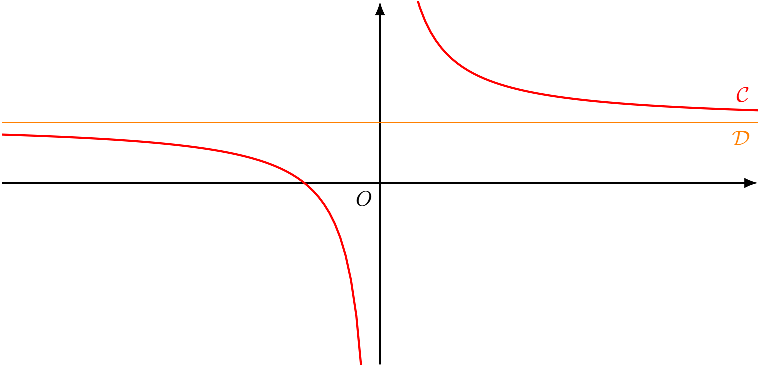
Exemples

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ car plus x se rapproche de $-\infty$, plus $\dfrac{1}{x}$ se rapproche de 0.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ car plus x devient grand, plus son carré le devient aussi.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ car plus x se rapproche de $-\infty$, plus $\dfrac{1}{x^3}$ se rapproche de 0.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ car plus x devient grand, plus sa racine carrée le devient aussi.

Asymptote horizontale

Définition

Soit a un réel. Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$ (resp. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $y = a$ en $-\infty$ (resp. $+\infty$).
Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une *asymptote horizontale* de $\mathcal{C}$.



Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Définition

Soit a un réel fini. La limite d'une fonction f en a est la valeur vers laquelle $f(x)$ se rapproche quand x se rapproche de a. On la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Remarque

Il se peut que, lorsque x se rapproche de a tout en lui étant inférieur, la limite soit différente du cas où x se rapproche de a en lui étant supérieur. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

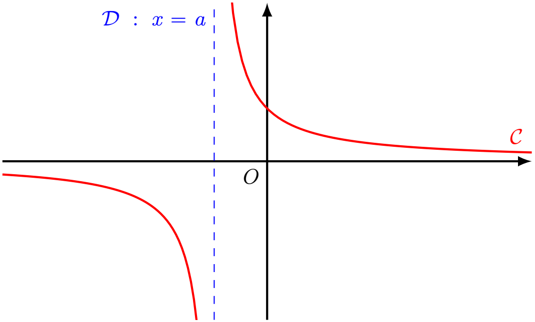
Exemples

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Asymptote verticale

Définition

Soit a un réel. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $x = a$.
Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de $\mathcal{C}$.



Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}$ en a.

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ pour } n \text{ pair} \\ -\infty \text{ pour } n \text{ impair} \end{cases}$.

Exemples

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^5} = -\infty$.

Propriétés

On note ℓ la limite de la fonction f et ℓ' la limite de la fonction g.

Limite d'une somme

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite d'un produit

$\lim f$	$\lim g$	$\lim fg$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	F.I.

Limite d'un quotient

$\lim f$	$\lim g$	$\lim \frac{f}{g}$
ℓ	$\ell'\neq 0$	ℓ/ℓ'
$\ell\neq 0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	F.I.
∞	∞	F.I.

Exemples

- On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + e^x$.
  On sait que : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
  Ainsi, par somme de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
- On considère la fonction g définie par $g(x) = -xe^x$.
  On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
  Ainsi, par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Théorème de comparaison

On considère deux fonctions f et g. Soit a une valeur ou une borne (finie ou infinie) de $D_f \cap D_g$.

- Si $\lim\limits_{x \to +a} f(x) = +\infty$ et s'il existe un réel A tel que, pour $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +a} f(x) = -\infty$ et s'il existe un réel A tel que, pour $x \geqslant A$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.

Exemples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2\cos(x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -1 \leqslant cos(x) \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -2 \leqslant 2cos(x) \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 + x \leqslant x + 2cos(x) \leqslant x + 2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant x + 2$. Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2) = -\infty$. Donc, selon le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Si, pour tout réel ℓ, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to +a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Exemples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant \sin(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, ainsi selon le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Propriété

Soient u et v deux fonctions. On définit la fonction f par $f(x) = u\big[v(x)\big]$.
Alors,

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{X \to y} u(X) \quad \text{où } y = \lim_{x \to \alpha} v(x),$$

α pouvant représenter un nombre fini ou un infini.

Remarque

On peut aussi noter :

$$f(x) = u\big[v(x)\big] = (u \circ v)(x)$$

(lire « u rond v »). On dit que f est une *fonction composée*.

Exemples

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

On a : $\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + 1\right) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X \longrightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\}$ ainsi, par composition de limites, on obtient : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

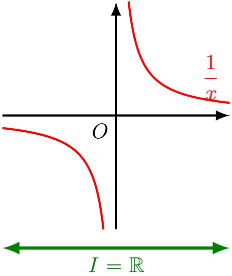
II. Continuité

Définition

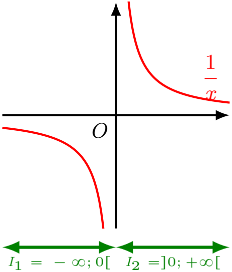
Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que f est *continue* en a si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I.

Exemples

La courbe représentative de la fonction inverse n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (car ses limites en 0 sont infinies). En revanche, elle l'est sur $]-\infty\ ;0[$ et sur $]0\ ;+\infty[$.



Il y a un « trou » au niveau de $x = 0$ donc la fonction n'est pas continue en 0, donc pas continue sur $\mathbb{R}$.



Il n'y a pas de trou sur chaque intervalle I_1 et I_2 donc la fonction est continue sur I_1 et sur I_2.

Propriétés

- Les fonctions *polynômes* sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions *rationnelles* sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- La fonction *racine carrée* est continue sur $[0\,;+\infty[$.
- La fonction *exponentielle* est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions obtenues par somme, produit ou quotient de fonctions continues sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

Exemples

1. La fonction $x \mapsto x^3 + 2x - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
2. La fonction $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto (x^2 + 1)\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$ est continue sur $]-\infty\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur ces deux intervalles.

Propriétés

Soit $f = v \circ u$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si u est continue sur I et si v est continue sur $u(I)$ alors f est continue sur I.

Exemples

Soient $u : x \mapsto x - 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Notons $f(x) = (v \circ u)(x) = \sqrt{x-1}$.
u est continue sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ car $x - 1 < 0$ pour $x < 1$. Ainsi, f est définie sur $I = [1\ ;\ +\infty[$, et elle est continue sur I car u est continue sur I et v est continue sur $u(I) = [0\ ;\ +\infty[$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

Théorème des bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a\ ;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a\ ;b]$.

Exemples

- Soit $f(x) = \cos x - x$. Alors, $f'(x) = -\sin x - 1 \leqslant$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante. f est aussi continue sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
  De plus,
  - $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$
  - $f(\pi) = \cos \pi - \pi = -1 - \pi < 0$

  donc $0 \in]f(\pi)\ ;\ f(0)[$. Ainsi, d'après le théorème de bijection,

  l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ \pi]$.
- L'équation $x^3 = 243$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ car la fonction cube $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ et 243 est compris entre $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ.
Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration

La suite (u_n) est convergente vers ℓ. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

De plus, la fonction f est continue en ℓ. Donc, $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$.

Par composition, on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. Donc, $f(\ell) = \ell$.

D'où le résultat.