Probabilités conditionnelles & Variables aléatoires

Terminale Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Probabilités conditionnelles

Définition

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A).$$

Démonstration

Elle découle de la définition : l'égalité des produits en croix mène à la propriété.

Exemple

Dans une urne, on place 10 boules, 3 noires et 7 rouges. On tire au hasard 3 boules, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?

En notant :

- N_1 l'événement « la boule tirée est noire au 1$^{\text{er}}$ tirage »,
- N_2 l'événement « la boule tirée est noire au 2$^{\text{e}}$ tirage »,

la probabilité demandée est $p(N_1 \cap N_2)$.

- $p(N_1) = \dfrac{3}{10}$ car il y a 3 boules noires sur 10 lors du 1$^{\text{er}}$ tirage ;
- $p_{N_1}(N_2) = \dfrac{2}{9}$ car il ne reste plus que 2 boules noires sur 9 au 2$^{\text{e}}$ tirage si l'on sait que l'on a déjà tiré une boule noire au 1$^{\text{er}}$ tirage.

Ainsi,

$$\begin{aligned} p(N_1 \cap N_2) &= p(N_1) \times p_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

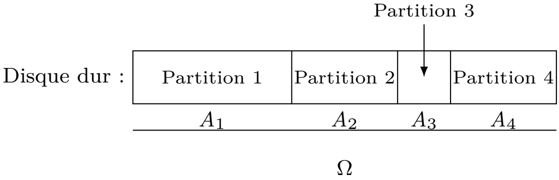
Définition

On dit que les n événements A_1, ... , A_n forment une **partition** de Ω si :

- tous les événements sont incompatibles deux à deux : $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$, pour tout $i \neq j$;
- $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n = \Omega$.

Remarque

- A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, quel que soit l'événement A.
- La notion de partition est similaire en informatique à un espace de stockage peut être découpé en plusieurs partitions.



Propriété

Soient A_1, A_2, ..., A_n n événements formant une partition de l'univers, avec $p(A_k) \neq 0$,
$1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, pour tout événement B,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B).$$

Démonstration

Les événements $\mathrm{A}_k \cap \mathrm{B}$ sont incompatibles deux à deux.
De plus,

$$\mathrm{B} = (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) \cup \cdots (\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}).$$

Donc,

$$p(B) = p(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + \cdots + p(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}).$$

Exemple

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de production.

N° de la machine utilisée	1	2	3
Pourcentage de pièces produites	50	35	15
Fréquence des défauts par machine	0,01	0,02	0,06

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.
Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On convient de noter :

- M_k l'événement : « La pièce provient de la machine nř k » ;
- D l'événement : « La pièce est défectueuse ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
p(D) &= p(D \cap M_1) + p(D \cap M_2) + p(D \cap M_3) \\
&= p(M_1) \times p_{M_1}(D) + p(M_2) \times p_{M_2}(D) + p(M_3) \times p_{M_3}(D) \\
&= 0,5 \times 0,01 + 0,35 \times 0,02 + 0,15 \times 0,06 \\
&= 0{,}021.
\end{aligned}$$

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p_A(\overline{B}) = 1 - p_B(A).$$

Démonstration

Par définition,

$$p_A(\overline{B}) = \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(A)}.$$

Or, $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_{\overline{B}}(A) &= \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} \\ &= 1 - \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \\ &= 1 - p_B(A). \end{aligned}$$

II. Indépendance

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p_B(A) = p(A) \Longleftrightarrow p_A(B) = p(B).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} p_B(A) = p(A) &\Longleftrightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \\ &\Longleftrightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B) \\ &\Longleftrightarrow p_A(B) = p(B). \end{aligned}$$

Définition

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On dit que A et B sont **indépendants** quand $p_B(A) = p(A)$.

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

Prorpriété

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} p_B(A) = p(A) &\iff \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \\ &\iff p(A \cap B) = p(A) \times p(B). \end{aligned}$$

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements :

- A : « Tirer un cœur » ;
- B : « Tirer un roi ».

On a :

- $p(A) = \dfrac{1}{4}$ car il y a 8 cœurs sur les 32 cartes en tout ;
- $p_B(A) = \dfrac{1}{4}$ car, sachant que la carte est un roi, il n'y a qu'une seule carte portant un cœur sur les 4 rois.

On a alors $p(A) = p_B(A)$, ce qui signifie que A et B sont indépendants.

Propriété

Soient A et B deux événements indépendants.
Alors, A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration

On sait que :

$$P_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B).$$

Or, $p_A(B) = p(B)$ car les événements A et B sont indépendants.
D'où :

$$p_A(\overline{B}) = 1 - p(B) = p(\overline{B}),$$

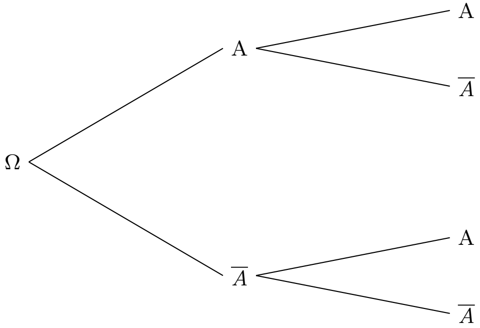
ce qui signifie que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque

Deux événements A et B incompatibles tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ ne sont pas indépendants.
En effet, A et B incompatibles signifie d'une part que $p(A) \times p(B) \neq 0$, d'autre part que $p(A \cap B) = 0$.
Ainsi, $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$; les événements ne sont donc pas indépendants.

III. Succession de deux épreuves indépendantes

Imaginons une expérience à 2 issues (A et $\overline{A}$ par exemple) que l'on répète deux fois de façon indépendante. Alors, la situation peut se représenter par l'arbre suivant :



Ainsi,

- la probabilité d'obtenir deux fois l'événement A est $p(A)^2$;
- la probabilité d'obtenir une seule fois l'événement A est $p(A \cap \overline{A}) + p(\overline{A} \cap A) = 2p(A \cap \overline{A})$;
- la probabilité de ne pas obtenir l'événement A est $p(\overline{A})^2$.

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés cubiques non pipés (non truqués) et regardons la somme des faces obtenues. Voici les différentes possibilités que nous avons :

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Notons S la somme des deux dés. Alors, les valeurs possibles de S sont dans l'ensemble : $\{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}$.
On dit ici que S est une *variable aléatoire* car sa valeur varie (d'où le mot « variable ») et ce, de façon aléatoire (car sa valeur dépend des issues obtenues dans l'expérience aléatoire).
Par abus de langage, et pour simplifier la notion, on écrira :

$$S = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}.$$

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire dont les issues possibles sont des nombres (lancers de dés, nombres de stylos dans une trousse,...).

On appelle **variable aléatoire** l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les issues de $\mathcal{E}$.

Exemples

1. L'univers étant une classe donnée, l'expérience consiste à regarder le nombre de stylos dans une trousse d'un élève. On constate que le nombre de stylos varie entre 5 et 10. Alors, la variable aléatoire représentant ce nombre est :

$$X = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

2. L'univers étant un lycée donné, l'expérience consiste à regarder dans chaque classe le nombre d'élèves mesurant plus de 2 mètres. On constate que ce nombre varie entre 0 et 5. Alors, la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves de ce lycée mesurant plus de 2 mètres est :

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

Définition

Soit Ω un univers probabilisé et $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire dans Ω.
Une **variable aléatoire** X est une application qui, à chaque événement élémentaires de Ω, associe un nombre réel. Autrement dit,

$$X \ : \ \Omega \to \mathbb{R}.$$

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

Remarque

- En théorie, $X(\Omega)$ est un ensemble pouvant être infini. Cependant, au lycée, on se limite au cas où il est fini.
- De plus, par soucis de simplification, on notera plutôt X l'ensemble $X(\Omega)$, quitte à installer une ambiguïté entre la fonction et l'ensemble des valeurs prises par cette fonction.
- Il existe deux types de variables aléatoires réelles : discrètes et continues. En 1$^{\text{re}}$, on ne rencontrera que des variables aléatoires discrètes, c'est-à-dire où les valeurs prises sont dénombrables (des valeurs que l'on peut compter une à une).

IV. Loi de probabilité

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète.
La **loi de probabilité** de X est la donnée de la probabilité de toutes les valeurs que peut prendre X.
En général, elle est donnée sous forme de tableau.

Exemple

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques non pipés, où S est la variable aléatoire représentant la somme obtenue.
D'après le tableau obtenu précédemment, on peut écrire :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(S = s_i)$	$\dfrac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

À titre d'exemple, sur les 36 issues possibles, seule une donne la somme « 2 ». Donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 2, que l'on note $p(S = 2)$, est égale à $\dfrac{1}{36}$.

V. Espérance d'une variable aléatoire

Définition

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.
On appelle **espérance mathématique** de X le nombre défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i)\ .$$

Remarque

Le calcul de l'espérance mathématique ressemble à celui de la moyenne d'une série statistique.
L'espérance peut alors être considérée comme la « valeur moyenne » de la variable aléatoire si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent. Alors,

$$E(S) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + \cdots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36}$$

$$E(S) = 7.$$

Cela signifie que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer obtenir en moyenne une somme égale à 7.

Propriété : Linéarité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire discrète. Soient a et b deux réels. Alors,

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Démonstration

Par définition, $a\mathrm{X} + b = \left\{ax_i + b\right\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Alors,

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b\right) \times p(aX + b = ax_i + b) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b\right) \times p(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ax_i \times p(X = x_i) + \sum_{i=1}^{n} bp(X = x_i) \\ &= aE(X) + b. \end{aligned}$$

VI. Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition

Soit X $= \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.

- On appelle **variance mathématique** de X le nombre défini par :

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \big[x_i - E(X)\big]^2 \times p(X = x_i) .$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent. Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S - E(S)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$
\begin{aligned}
V(S) &= (-5)^2 \times \frac{1}{36} + (-4)^2 \times \frac{1}{18} + (-3)^2 \times \frac{1}{2} + \cdots + 5^2 \times \frac{1}{36} \\
&= \frac{35}{6} \\
&\approx 5,83
\end{aligned}
$$

et donc,

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,4.$$

Dans la formule $V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$, si on élève au carré la variable $X - E(X)$, c'est pour manipuler une variable positive. Cette nouvelle variable représente alors le carré de la différence entre X et son espérance. Ainsi, la variable est l'espérance de ce carré ; on peut donc l'interpréter comme la moyenne des carrés des différences entre X et $E(X)$.
En prenant la racine carrée de la variance pour calculer l'écart-type, on se ramène à la moyenne des différences (en valeur absolue). Ainsi, l'écart-type représente l'écart moyen de chaque valeur de X à son espérance.

En obtenant $E(S) = 7$ et $\sigma(S) \approx 2,4$, on peut conclure que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer en moyenne avoir une somme égale à 7 plus ou moins 2,4, soit une somme comprise entre 4,6 et 9,4.

Propriété :

Soit X $= \{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une variable aléatoire discrète. Alors,

$$V(X) = E(X^2) - \big[E(X)\big]^2.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X) &= E\big(X - E(X)\big)^2 \quad \text{(par définition)} \\ &= E(X^2) - E(2XE(X)) + E\big(E(X)\big)^2 \\ &= E(X^2) - 2\big[E(X)\big]^2 + \big[E(X)^2\big] \\ &= E(X^2) - \big[E(X)\big]^2. \end{aligned}$$

Remarque

Dans la pratique, ce théorème nous permet de calculer la variance de façon peut-être plus simple que dans certains cas.

Propriété : Somme de variables aléatoires

On considère X et Y deux variables aléatoires réelles associées à une même expérience sur un univers fini Soient de plus a et b deux réels, on a :

- pour l'espérance : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
- pour la variance : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes.

Exemple

On considère une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans $\{-3; 1; 15; 30\}$et telle que : $E(X) = 8$ et $V(X) = 3$. On construit la variable aléatoire $Y = -3X + 5$.

1. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
   $Y \in \{14; 2; -40; -85\}$.
2. Déterminer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
   $E(Y) = E(-3X+5) = -3E(X) + 5 = -3 \times 8 + 5 = -19$.
   $V(Y) = V(-3X+5) = (-3)^2 \times V(X) = 9 \times 3 = 27$.
   $\sigma(X) = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.
3. Donner $E(X+Y)$.
   $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 8 - 19 = -11$.