Tle Spé Maths
Entraînement

Limites & Continuité

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

Déduire de chaque limite l'équation d'une éventuelle asymptote au graphe de la fonction f.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.
2. $\lim\limits_{x\to+3} f(x) = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = +\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
6. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 10^{100}$.
8. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$.

Exercice 2 :

Le graphe d'une fonction f admet une asymptote d'équation donnée. Déduire les limites possibles de f.

1. $x = 1$.
2. $y = -2$.
3. $y = 4$.
4. $x = 0$.
5. $x = -3$.
6. $y = 0$.

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = -2 + \dfrac{1}{x}$.

1. Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Donner les limites de f à droite et à gauche en 0.
3. Déduire de 1 et 2 les asymptotes à la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

Exercice 4 :

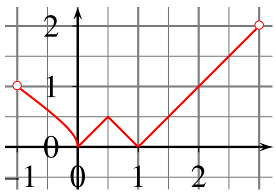
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$ par : $g(x) = \dfrac{-3x^2+5}{x^2-4}$.

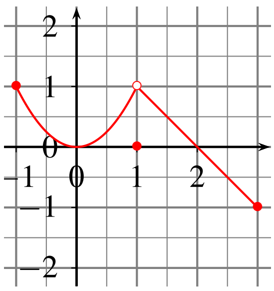
1. Donner les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en -2 et en 2.
2. Donner les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
3. En utilisant la calculatrice, étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

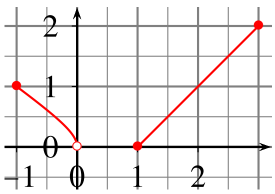
Exercice 5 :

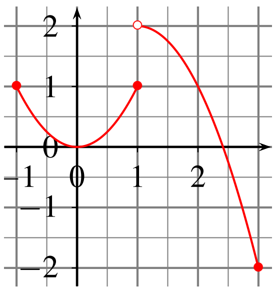
Dans chaque repère ci-dessous, la courbe tracée représente une fonction f.

1. Déterminer les intervalles où f est continue.
2. Donner l'image de 1 par la fonction f.
   Coïncide-t-elle avec les limites de f en 1, à gauche et à droite ?









Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2x-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

$\boxed{1}$ Tracer la courbe représentative de f.

$\boxed{2}$ La fonction f est-elle continue en 1 ?

$\boxed{3}$ Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$.

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie sur $I = [-4\ ;\ 1]$ par : $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ dont les variations sont données par le tableau suivant :

x	-4		-3		-1		1
f	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19

$\boxed{1}$ Justifier que f est continue sur I.

$\boxed{2}$ Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

$\boxed{3}$ (a) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.

(b) Déterminer un encadrement de α à l'unité près.

Exercice 8 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4$.

$\boxed{1}$ Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$.

$\boxed{2}$ Dresser le tableau de variation de f.

$\boxed{3}$ Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$.

$\boxed{4}$ Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

Exercice 9 :

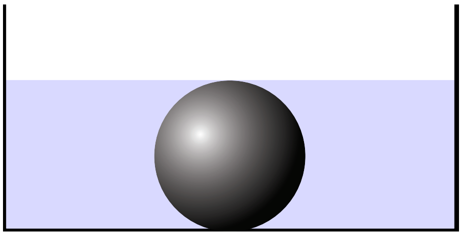
Une fonction g a pour tableau de variation :

x	-10		-4		0		3		10
g	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Discuter, suivant la valeur de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 10 :

Une boite cylindrique de rayon 12 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm. On immerge une boule métallique dans ce récipient et on constate que la surface de l'eau est tangente à la boule. On désigne par x le rayon de la boule en millimètre.



1 (a) Démontrer que $25 \leqslant x \leqslant 120$.

(b) Démontrer que x est solution de l'équation :

$$x^3 - 21\,600x + 540\,000 = 0 \qquad \text{(E)}$$

2 (a) Démontrer que l'équation (E) admet deux solutions positives α et β telles que :

$$\alpha \in [25,6\ ;\ 26] \text{ et } \beta \in [125\ ;\ 135].$$

(b) Déterminer alors une valeur approchée du rayon de la boule à 0,1 mm près.

Exercice 11 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).
Le but de ce problème est l'étude de la fonction f et la résolution graphique d'une équation à partir de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de f.

Étude d'une fonction auxiliaire : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 4.$$

1 Étudier les variations de la fonction g.

2 Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]2,1\ ;\ 2,2[$ tel que $g(x) = 0$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

3 Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Étude de la fonction f :

1 Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

2 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}.$$

3 En déduire le tableau de variation de la fonction.

4 (a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$:

$$f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}.$$

(b) En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique $(\mathscr{D})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

(c) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

5 Tracer la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1 Montrer que f est paire.

2 Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

3 Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4 Tracer sa courbe représentative dans un repère.

5 (a) Montrer que, pour tout $y \in]0\,;\,1]$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution α dans $[0\,;\,+\infty[$.

(b) Exprimer α en fonction de y.

Exercice 13 :

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
Soit la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1 (a) Déterminer la limite de u en $-\infty$.

(b) Montrer que, pour tout x réel :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

En déduire la limite de u en $+\infty$.

2 (a) Montrer que $u(x)+2x$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

(b) Montrer que pour tout x réel, on a $u(x) > 0$.
En déduire le signe de $u(x)+2x$.

(c) Interpréter graphiquement ces résultats.

3 (a) Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(b) Étudier les variations de la fonction u.

4 Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et son asymptote oblique.