Limites & Continuité

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$. Ainsi, la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=3$.

2. $\lim_{x\to+3} f(x)=-\infty$. Ainsi, la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x=3$.

3. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Lorsque x tend vers $-\infty$, f n'admet pas d'asymptote horizontale.

4. $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=+\infty$. Ainsi, la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

5. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$. Ainsi, la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

6. $\lim_{x\to1} f(x)=-\infty$. Ainsi, la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

7. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=10^{100}$. Ainsi, la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=10^{100}$.

8. $\lim_{x\to1} f(x)=1$. Autrement dit, la fonction f est continue en 1.

Exercice 2 :

Le graphe d'une fonction f admet une asymptote d'équation donnée.

1. $x=1$ est l'équation d'une asymptote de f, donc :
$\lim_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\pm\infty$.

2. $y=-2$ est l'équation d'une asymptote de f, donc : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-2$.

3. $y=4$ est l'équation d'une asymptote de f, donc : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=4$.

4. $x=0$ est l'équation d'une asymptote de f, donc :
$\lim_{x\to0} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\pm\infty$.

5. $x=-3$ est l'équation d'une asymptote de f, donc :
$\lim_{x\to-3} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)=\pm\infty$.

6. $y=0$ est l'équation d'une asymptote de f, donc : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=-2+\dfrac{1}{x}$.

1. On sait que : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Donc, par somme, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -2+\dfrac{1}{x}=-2$.
Idem, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Donc, par somme, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -2+\dfrac{1}{x}=-2$.

2 On sait que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$. Ainsi, par somme de limites, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -2+\frac{1}{x} = +\infty$.

Idem, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$. Ainsi, par somme de limites, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} -2+\frac{1}{x} = -\infty$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$ donc f admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ donc f admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = -\infty$ donc f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$ donc f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

Exercice 4 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\ ;\ 2\}$ par : $g(x) = \dfrac{-3x^2+5}{x^2-4}$.

1 On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Or, $-3<0$, donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$, et par somme, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2+5 = -\infty$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5 = +\infty$. Nous avons donc une forme indéterminée.
Dès lors, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\ ;0;\ 2\}$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{-3x^2+5}{x^2-4} \\ &= \frac{x^2\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} \\ &= \frac{-3+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}. \end{aligned}$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. En conséquence, par somme et quotient de limites, on obtient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$.
Idem, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$.

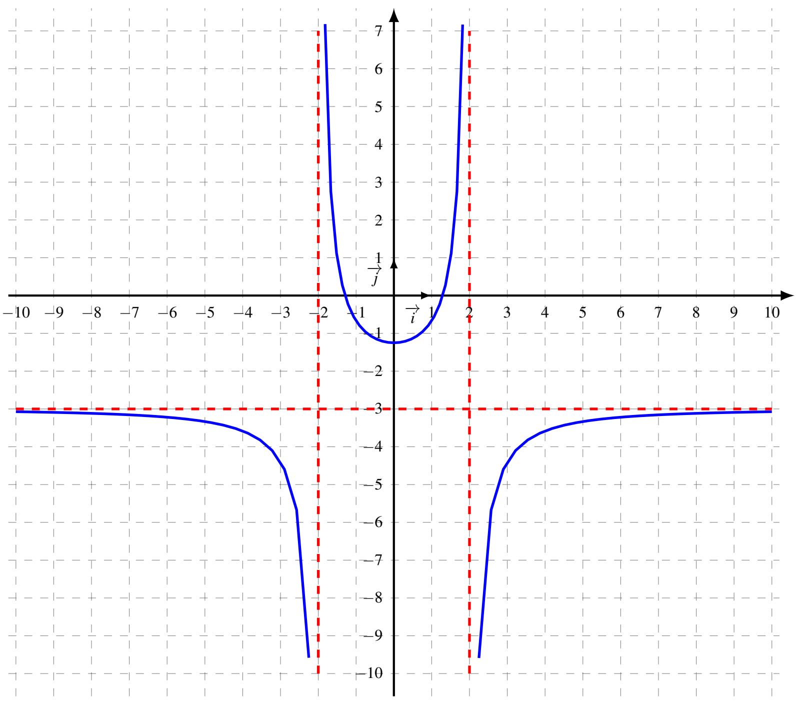
Le tableau de signe de la fonction $x \longrightarrow x^2-4$, située au dénominateur, aide à obtenir les limites plus rapidement :

x	∞		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $-3\times 2^2+5=-7<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} g(x) = -\infty$
- $-3\times 2^2+5=-7<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} g(x) = +\infty$
- $-3\times (-2)^2+5=-7<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} g(x) = +\infty$
- $-3\times (-2)^2+5=-7<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x<-2}} g(x) = -\infty$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -3$ donc g admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -3$ donc g admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$.
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} g(x) = +\infty$ donc g admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} g(x) = -\infty$ donc g admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} g(x) = -\infty$ donc g admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.
$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} g(x) = +\infty$ donc g admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

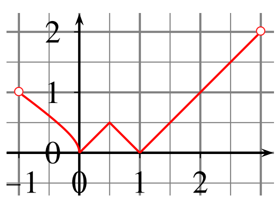
$\boxed{3}$ En utilisant la calculatrice, on obtient :

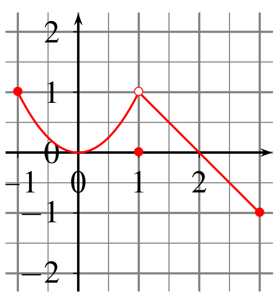


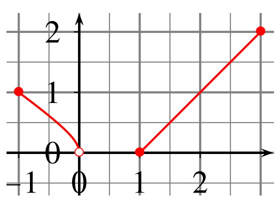
On constate alors que pour tout $x \in]-2;2[$, $g(x) > -3$ et pour tout $x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$, $g(x) < -3$.

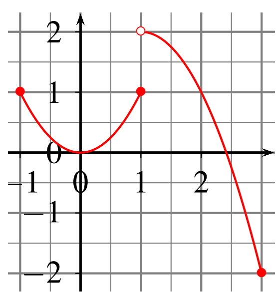
Exercice 5 :

Dans chaque repère ci-dessous, la courbe tracée représente une fonction f.


①


②


③


④

$\boxed{1}$ ① f est continue sur $]-1;3[$.
② f est continue sur $[-1;1[$ et sur $]1;3]$.
③ f est continue sur $[-1;0[$ et sur $[1;3]$.
③ f est continue sur $[-1;1]$ et sur $]1;3]$.

2 ① $f(1)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 0$.

② $f(1)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 1$.

③ $f(1)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ n'existe pas et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 0$.

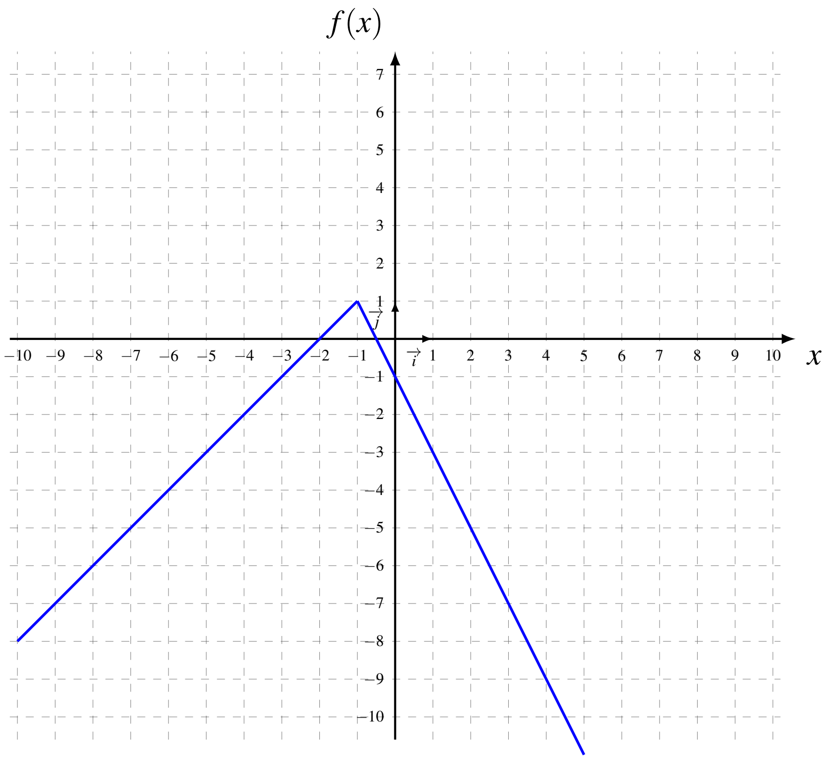
④ $f(1)=1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 2$.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2x-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

1 Ci-après la courbe représentative de f.



2 La fonction f est continue en 1.

3 En effet, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} (x+2) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (-2x-1) = 1$.

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie sur $I = [-4\ ;\ 1]$ par : $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ dont les variations sont données par le tableau suivant :

x	-4	-3	-1	1
f	-1 ↗	3 ↘	-1 ↗	19

1. f est une fonction polynôme de degré 3 donc f est continue sur $[-4\ ;\ 1]$.
2. f est continue et strictement croissante sur $[-4\ ;\ -3]$. De plus, $f(-4) = -1 < 2$ et $f(-3) = 3 > 2$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-4\ ;\ -3]$.
   Le théorème s'applique aussi sur les intervalles $[-3\ ;\ -1]$ et $[-1\ ;\ 1]$. On en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet trois solutions dans I.
3. (a) f est continue et strictement croissante sur $[-1\ ;\ 1]$. De plus, $f(-1) = -1 < 4$ et $f(1) = 19 > 4$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans $[-1\ ;\ 1]$. Le maximum de f sur $[-4\ ;\ -1]$ est $3 < 4$ donc il n'y a pas d'autre solution sur I.
   (b) On sait déjà que $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
   On calcule $f(0) = 3 < 4$ donc $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Exercice 8 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4$.

1. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$.
4. Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

Exercice 9 :

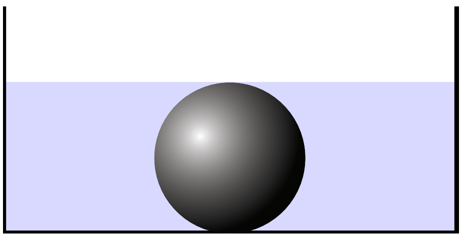
Une fonction g a pour tableau de variation :

x	-10		-4		0		3		10
g	$\sqrt{2}$	↘		↗	2	↘		↗	$+\infty$
			$-\pi$				-4		

Discuter, suivant la valeur de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 10 :

Une boite cylindrique de rayon 12 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm. On immerge une boule métallique dans ce récipient et on constate que la surface de l'eau est tangente à la boule. On désigne par x le rayon de la boule en millimètre.



1. (a) Démontrer que $25 \leqslant x \leqslant\ 120$.
   (b) Démontrer que x est solution de l'équation :

$$x^3 - 21\,600x + 540\,000 = 0 \qquad \text{(E)}$$

2 (a) Démontrer que l'équation (E) admet deux solutions positives α et β telles que :

$$\alpha \in [25,6\ ;\ 26] \ \text{ et } \ \beta \in [125\ ;\ 135].$$

(b) Déterminer alors une valeur approchée du rayon de la boule à 0,1 mm près.

Exercice 11 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).
Le but de ce problème est l'étude de la fonction f et la résolution graphique d'une équation à partir de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de f.

Étude d'une fonction auxiliaire : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 4.$$

1 Étudier les variations de la fonction g.

2 Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]2,1\ ;\ 2,2[$ tel que $g(x) = 0$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

3 Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Étude de la fonction f :

1 Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

2 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}.$$

3 En déduire le tableau de variation de la fonction.

4 (a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$:

$$f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}.$$

(b) En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique $(\mathscr{D})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

(c) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

5 Tracer la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1 Montrer que f est paire.

2 Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3 Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4 Tracer sa courbe représentative dans un repère.

5 (a) Montrer que, pour tout $y \in]0 ; 1]$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution α dans $[0 ; +\infty[$.

(b) Exprimer α en fonction de y.

Exercice 13 :

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}\ \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
Soit la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1 (a) Déterminer la limite de u en $-\infty$.

(b) Montrer que, pour tout x réel :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

En déduire la limite de u en $+\infty$.

2 (a) Montrer que $u(x) + 2x$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

(b) Montrer que pour tout x réel, on a $u(x) > 0$.
En déduire le signe de $u(x) + 2x$.

(c) Interpréter graphiquement ces résultats.

3 (a) Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(b) Étudier les variations de la fonction u.

4 Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et son asymptote oblique.