Tle Spé Maths
Entraînement

Vecteurs, droites et plans

dans l'espace

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

C'est une rédaction A.P.M.E.P.

1. **a.** Dans le repère $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les points suivants :
H$(0 ; 2 ; 2)$, M$(3 ; 0 ; 1)$ et N$(3 ; 1 ; 1)$.

b. On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par $\overrightarrow{HM}$ et elle passe par H, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_H + t x_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + t y_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + t z_{\overrightarrow{HM}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2. Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles , elles sont donc sécantes.

On a $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix} x_N - x_E \\ y_N - y_E \\ z_N - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (EN) est dirigée par $\overrightarrow{EN}$ et elle passe par E, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_E + t x_{\overrightarrow{EN}} \\ y = y_E + t y_{\overrightarrow{EN}} \\ z = z_E + t z_{\overrightarrow{EN}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0 \end{cases} \iff t = t' = \frac{2}{3}$$

Le point d'intersection est donc le point P de coordonnées $\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

Exercice 2 :

1. L'équation paramétrique de d_2 montre qu'elle contient le point de coordonnées $(-3 ; 0 ; 5)$ et de vecteur directeur dont les composantes sont les coefficients de k donc $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3. Une représentation paramétrique de la droite d_1 est $\begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= 3 - t \\ z &= t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

S'il existe un point commun aux deux droites, il doit donc exister des réels k et t tels que :

$$\begin{cases} x &= 2+t &= 2k-3 \\ y &= 3-t &= k \\ z &= t &= 5 \end{cases}$$

La dernière équation donne $t=5$, puis la deuxième $k=3-5=-2$ et en remplaçant dans la première $2+5=-4-3$: cette égalité est fausse, donc d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

$\boxed{4}$ Les droites n'étant ni sécantes ni parallèles elles ne sont pas coplanaires.

Exercice 3 :

$\boxed{1}$ On a : E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ La droite (EC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Donc la droite (EC) a pour représentation paramétrique ;

$$\begin{cases} x = x_{\mathrm{E}}+1\times t \\ y = y_{\mathrm{E}}+1\times t \\ z = z_{\mathrm{E}}+(-1)\times t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{soit} \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Exercice 5 :

C'est une rédaction A.P.M.E.P.

$\boxed{1}$ On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4-3\\-1-(-1)\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}0-3\\3-(-1)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$.

On a $x_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}=-3x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$, mais $y_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\neq -3y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$, les vecteurs sont donc non colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\boxed{2}$ On sait que A, B et C ne sont pas alignés, et donc qu'ils définissent un plan. Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de montrer que D est un point du plan (ABC), ce qui équivaut à prouver qu'un vecteur reliant un point du plan (ABC) au point D est coplanaire à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Pas tout à fait au hasard (car on a regardé l'énoncé de la question suivante), on va choisir d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ en fonction d'une base de (ABC) constituée des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ dont on a déjà déterminé les coordonnées précédemment.

On a : $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}4-0\\3-3\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

On remarque que l'on a : $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=4\times\overrightarrow{\mathrm{AB}}+0\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ peut donc être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, donc c'est un vecteur du plan (ABC), et puisque C est dans le plan (ABC), on en déduit que D est également dans (ABC).

Finalement, puisque D est dans (ABC), les quatre points A, B, C et D sont bien coplanaires.

$\boxed{3}$ À la question précédente, on a établi $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=4\times\overrightarrow{\mathrm{AB}}+0\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=4\times\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ étant colinéaires, les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles (strictement, car C n'est pas aligné avec A et B).

ABCD est donc une figure plane (les quatre points étant coplanaires), c'est donc un quadrilatère, non croisé (puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, cela signifie que ABDC est non croisé, ABCD serait un quadrilatère croisé), dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles : le quadrilatère ABDC est donc bien un trapèze, de bases [AB] et [DC].