Probabilité conditionnelle

Variable aléatoire

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de passages à l'infirmerie dans un lycée dans une journée.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,35	0,3	0,25	$\cdots$

1. Calculer le réel $P(X=3)$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux passages à l'infirmerie dans la journée.

Exercice 2 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,02	0,12	a	0,31	0,27

1. Calculer le réel a.
2. Calculer $P(X \geqslant 2)$ et $P(X > 0)$.

Exercice 3 :

Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. Calculer p.

x_i	0	1	2
$p_i = P(X=x_i)$	p	$2p$	$3p$

Exercice 4 :

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains devant peser normalement 500 g. On note X la variable aléatoire donnant les masses possibles des pains en grammes. On donne la loi de probabilité de X.

x_i	480	490	500	510	520
$P(X=x_i)$	0,08	0,29	0,41	0,12	0,1

1. Quelle est la probabilité qu'un pain pèse au moins 500 g ?
2. Seuls les pains pesant au moins 490 g vont être commercialisés. Quelle est la probabilité qu'un pain soit commercialisé ?

Exercice 5 :

1. Une variable aléatoire prend chacune des valeurs 0 ; 1 ; 2 avec les probabilités respectives $0,21$; $0,16$ et $0,63$. Calculer $E(X)$.
2. Une variable aléatoire prend chacune des valeurs -2 ; 1 ; 2 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$. Calculer $E(X)$.

Exercice 6 :

Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,25	0,4	0,2	0,05

1. Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.
2. Calculer $P(X \geqslant 0)$ puis $P(X < 1)$.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 7 :

Le nombre de clients passant à la caisse d'un supermarché en 10 min est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité ci-dessous.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

Combien de clients, en moyenne, le caissier peut-il espérer faire passer en une heure ?

Exercice 8 :

On donne la ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui représente le gain (positif ou négatif) associé à un jeu.

x_i	-4	-3	0	2	5
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Le jeu est il équitable ? Est-il favorable au joueur ou défavorable au joueur ?

Exercice 9 :

On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-7	3	a
p_i	0,3	0,5	0,2

Calculer a sachant que $E(X) = 1,2$.

Exercice 10 :

On considère un jeu de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Une partie consiste à lancer successivement trois fois la pièce.
On note P la sortie de PILE et F la sortie de FACE.

1. Donner, à l'aide d'un arbre, la liste des huit issues possibles.
2. Chaque PILE obtenu fait gagner 2 € mais chaque FACE fait perdre 3 €. De plus, si les trois lancers de la partie donnent un résultat identique, le joueur reçoit en plus un bonus de 2 €.
   On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain réalisé.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
   (c) Quel bonus p faut-il donner au joueur pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 11 :

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.
À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas.
Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.
Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les évènements suivants :

— A : « le client choisit de faire l'aller en bateau » ;

— R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

On rappelle que si E est un évènement, $p(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E et on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.

2. On choisit au hasard un client de l'agence.
   (a) Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.
   (b) Montrer que la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport est égale à 0,31.

3. On choisit au hasard 20 clients de cette agence. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport.
   On admet que le nombre de clients est assez grand pour que l'on puisse considérer que X suit une loi binomiale.
   (a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
   (b) Déterminer la probabilité qu'exactement 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents.
   (c) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents.

4. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 € en bateau ; il est de 1 200 € en train.
   On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euro de son trajet aller-retour.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter le résultat.

Exercice 12 :

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.
Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

— lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;

— lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les évènements :

— C : « l'heure est creuse »

— T : « le terrain est occupé »

1 Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

2 Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.

3 Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.

4 Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\dfrac{27}{41}$.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

— 10 € pour une heure pleine,

— 6 € pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

— 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,

— 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,

— 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.

5 Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X.

6 Déterminer l'espérance de X.

7 La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine. Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

Exercice 13 :

Une agence de voyage propose des formules week-end à Londres au départ de Paris pour lesquelles le transport et l'hôtel sont compris. Les clients doivent choisir entre les deux formules : « avion + hôtel » ou « train + hôtel » et peuvent compléter ou non leur formule par une option « visites guidées ».
Une étude a produit les données suivantes :

— 40% des clients optent pour la formule « avion + hôtel » et les autres pour la formule « train + hôtel » ;

— parmi les clients ayant choisi la formule « train + hôtel », 50% choisissent aussi l'option « visites guidées » ;

— 12% des clients ont choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres. On note :

A l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » ;

T l'événement : le client interrogé a choisi la formule « train + hôtel » ;

V l'événement : le client interrogé a choisi l'option « visites guidées ».

1 (a) Quelle est la probabilité de l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » ?

(b) Calculer la probabilité $P_A(V)$.

(c) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2 (a) Montrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.

(b) Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au millième.

3 L'agence pratique les prix (par personne) suivants :

Formule « avion + hôtel » : 390 €
Formule « train + hôtel » : 510 €
Option « visites guidées » : 100 €

Quel montant du chiffre d'affaires l'agence de voyage peut-elle espérer obtenir avec 50 clients qui choisissent un week-end à Londres ?

Exercice 14 :

Un restaurateur propose trois formules à midi :

Formule A : Plat du jour / Dessert / Café

Formule B : Entrée / Plat du jour / Dessert / Café

Formule C : Entrée / Plat du jour / Fromage / Dessert / Café

Lorsqu'un client se présente au restaurant pour le repas de midi, il doit choisir une des trois formules proposées et commander ou non du vin.

Le restaurateur a constaté qu'un client sur cinq choisit la formule A, tandis qu'un client sur deux choisit la formule B.

On sait aussi que :

— Parmi les clients qui choisissent la formule A, une personne sur quatre commande du vin.
— Parmi les clients qui choisissent la formule B, deux personnes sur cinq commandent du vin.
— Parmi les clients qui choisissent la formule C, deux personnes sur trois commandent du vin.

Un client se présente au restaurant pour le repas de midi. On considère les évènements suivants :

A : « le client choisit la formule A »

B : « le client choisit la formule B »

C : « le client choisit la formule C »

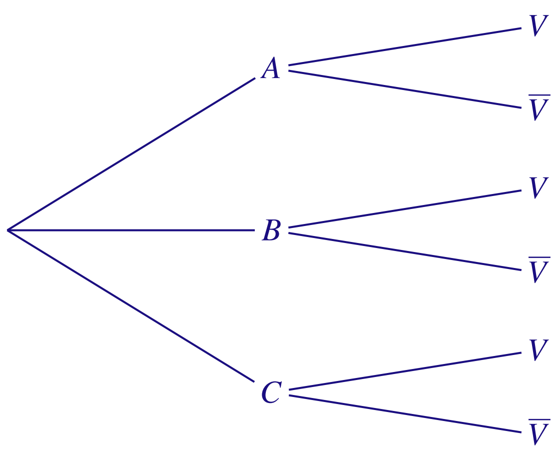
V : « le client commande du vin »

Si A et B désignent deux évènements d'une même expérience aléatoire, alors on notera $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et $p_A(B)$ la probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé.

Les probabilités demandées seront arrondies, si c'est nécessaire, au centième.

1 Calculer $p(C)$.

2 Reproduire et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous.



3 Montrer que $p(V) = 0,45$.

4 Le client commande du vin. Calculer la probabilité qu'il ait choisi la formule A.

5 La formule A coûte 8 euros, la formule B coûte 12 euros et la formule C coûte 15 euros. Le vin est en supplément et coûte 3 euros. On note D la dépense en euro d'un client venant manger à midi dans ce restaurant.

(a) Déterminer la loi de probabilité de D.

(b) Calculer la dépense moyenne par client en euro.

Exercice 15 :

L'entreprise E produit un modèle de lave-vaisselle. La production de ce lave-vaisselle est répartie sur trois sites industriels A, B, C, qui sont d'importances inégales.

— Le site A assure 60 % de la production.

— Le site B assure 30 % de la production.

— Le site C assure le reste de la production.

Après plusieurs années de commercialisation, on note que 37 % des lave-vaisselles en provenance du site A connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation ; 25 % des lave-vaisselles provenant du site B connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation, et 12 % de ceux provenant du site C connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation.
On choisit au hasard un lave-vaisselle produit par l'entreprise E.

Dans la suite on désigne par A, (respectivement par B, C) l'évènement « le lave-vaisselle choisi est issu du site de production A (respectivement B, C) ».
On désigne par S, l'évènement « le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans » ; $\overline{S}$ désigne l'évènement contraire de S.

1 (a) Préciser les valeurs des probabilités $p(A)$ et $p(B)$.

(b) On note $p_A(S)$ (respectivement $p_B(S)$, $p_C(S)$) la probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement A (respectivement B, C) est réalisé ; calculer $p_A(S)$, $p_B(S)$ et $p_C(S)$.

(c) Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur les branches adéquates les probabilités données dans l'énoncé.

2 Quelle est la probabilité que le lave-vaisselle provienne du site A et connaisse une panne avant 5 ans ?

3 Démontrer que la probabilité de l'évènement S est 0,309.

4 Le lave-vaisselle est tombé en panne avant 5 ans d'utilisation ; quelle est la probabilité qu'il provienne du site B ?

5 Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
L'entreprise E assure le service après-vente : si le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans d'utilisation, elle finance la réparation, dont le prix est estimé à 110 euros par appareil réparé.
Déterminer, pour l'entreprise, le coût moyen par lave-vaisselle de ces réparations.

Exercice 16 :

Dans un salon de coiffure pour femmes, le coloriste propose aux clientes qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires :

— une coloration naturelle à base de plantes qu'il appelle « couleur-soin »,

— des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, qu'il appelle « effet coup de soleil ».

Ce coloriste a fait le bilan suivant sur ces prestations :

— 40% des clientes demandent une « couleur-soin ».

— parmi celles qui n'en veulent pas, 30% des clientes demandent un « effet coup de soleil ».

— de plus, 24% des clientes demandent les deux à la fois.

On considère une de ces clientes.
On notera C l'évènement « la cliente souhaite une "couleur-soin" ».
On notera M l'évènement « la cliente souhaite un "effet coup de soleil" ».

1 Calculer la probabilité de M sachant C notée $P_C(M)$.

2 Construire un arbre pondéré qui illustre la situation.

3 Calculer la probabilité que la cliente ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil ».

4 Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à 0,42.

5 Les évènements C et M sont-ils indépendants ?

6 Une « couleur-soin » coûte 35 euros et un « effet coup de soleil » coûte 40 euros.

(a) Recopier puis compléter sans justifier le tableau suivant donnant la loi de probabilité du gain en euros du coloriste par client :

x_i	75	40	35	0
p_i	0,24			0,42

(b) Donner l'espérance E de cette loi.

(c) Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Combien le coloriste doit-il facturer la réalisation d'un « effet coup de soleil » pour que l'espérance de gain par client augmente de 15% ?

Exercice 17 :

L'Etat du Wyoming, aux Etats-Unis, accueille chaque année près de 3,5 millions de touristes, notamment venus visiter les parcs nationaux de Yellowstone et de Grand Teton.
92% de ces touristes visitent le parc de Yellowstone ; parmi ceux-là, 60% visitent aussi le parc du Grand Teton.
Enfin, 6% des touristes se rendant au Wyoming ne visitent aucun des deux parcs.

On interroge au hasard un touriste s'étant rendu au Wyoming ; on suppose que tous ces touristes ont la même probabilité d'être interrogés.
On note Y l'événement : « le touriste a visité le parc de Yellowstone » ; $\overline{Y}$ désigne l'événement contraire de Y.
On note G l'événement : « le touriste a visité le parc du Grand Teton » ; $\overline{G}$ désigne l'événement contraire de G.
On note $p(A)$ la probabilité d'un événement A et, si B est un événement de probabilité non nulle, $p_B(A)$ la probabilité d'un événement A sachant que l'événement B est réalisé.
Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1 Que vaut $p\left(\overline{Y}\cap\overline{G}\right)$ la probabilité de l'événement "$\overline{Y}$ et $\overline{G}$" ?

2 Construire un arbre pondéré décrivant la situation étudiée, en y indiquant les probabilités données par l'énoncé qui correspondent à certaines de ses branches.

3 Calculer $p_{\overline{Y}}\left(\overline{G}\right)$. Interpréter ce résultat par une phrase.

4. Montrer que $p(G) = 0,572$.

5. Un touriste a visité le parc du Grand Teton. Calculer la probabilité qu'il ait aussi visité le parc de Yellowstone (le résultat sera arrondi à 10^{-3} près).

6. Le billet d'entrée pour le parc de Yellowstone est de 10 dollars, celui pour le parc du Grand Teton est de 7 dollars.

   (a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la somme, en dollars, dépensée pour la visite des parcs de Yellowstone et du Grand Teton par un touriste se rendant au Wyoming.

Somme en dollars	0			17
Probabilité				

   (b) Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.

Exercice 18 :

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le Wifi. Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS. Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis.
On considère les évènements suivants :

G : « le téléphone possède l'option GPS ».

W : « le téléphone possède l'option Wifi ».

Dans tout l'exercice, le candidat donnera des valeurs exactes.

1. Traduire les données chiffrées de l'énoncé en termes de probabilité.

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

On suppose que la probabilité de W est : $p(\mathrm{W}) = \dfrac{7}{10}$.

3. Déterminer la probabilité de l'évènement « le téléphone possède les deux options ».

4. Démontrer que $p_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{W}) = \dfrac{23}{30}$. Compléter l'arbre du **2.**

5. On choisit un téléphone avec l'option Wifi. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS ?

Le coût de revient par téléphone d'une option, pour le fabricant de téléphones, est de 12 euros pour l'option GPS et de 6 euros pour l'option Wifi.

6. Déterminer la loi de probabilité du coût de revient de ces deux options.

7. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Interpréter ce résultat.