# Suites

Évarite Galois
maths-mde.fr

## Exercice 1 :

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie de façon explicite.
Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1. $u_n = 3+4n$.
2. $u_n = 8\times 2^n$.
3. $u_n = 2\times 3^{n-1}$.
4. $u_n = \sqrt{2^n}$.
5. $u_n = \dfrac{5}{3^n}$.
6. $u_n = n(n+1)-n(n-1)$.
7. $u_n = n^2+2n+1$.
8. $u_n = \dfrac{1}{3^n}+1$.
9. $u_n = 2^n+1$.
10. $u_n = \dfrac{\sqrt{2^n}}{3^n}$.

## Exercice 2 :

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie à l'aide d'une relation de récurrence.
Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1. $u_{n+1} = 3u_n$, $u_0 = 1$.
2. $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$.
3. $u_n = 2u_{n-1}$, $u_0 = 1$.
4. $u_{n+1} = u_n - \pi$, $u_0 = 2\pi$.
5. $u_{n+1} = 3(u_n-1)-2(u_n+1)$, $u_0 = 1$.
6. $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2}$, $u_0 = 2$.
7. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 2$.
8. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 1$.

## Exercice 3 :

On considère une suite $(u_n)$ arithmétique de raison $r$.

1. $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer $r$.
2. $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer $r$.
3. $u_0 = 5$ et $r = -\dfrac{1}{2}$. Calculer $u_9$.
4. $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer $u_{20}$.
5. $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer $r$.

## Exercice 4 :

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$.

1. Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0+u_1+\cdots+u_{100}$.
2. Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0+u_1+\cdots+u_{50}$.
3. Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1+u_2+\cdots+u_{100}$.
4. Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1+u_2+\cdots+u_{50}$.

## Exercice 5 :

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$.

1. $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer $q$.
2. $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer $u_9$.
3. $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer $u_8$.
4. $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer $u_{10}$.
5. $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer $u_7$.

## Exercice 6 :

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$.

1. Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
2. Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
3. Si $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
4. Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

## Exercice 7 :

Étudier le sens de variation des suites $(u_n)$ définies ci-dessous :

1. $u_n = \frac{2^n}{5}$.
2. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
3. $u_n = \sqrt{n^2 + 3}$.
4. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 5$.

## Exercice 8 :

On définit la suite $(u_n)$ par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

1. Montrer que $(u_n)$ est croissante.
2. Montrer que $(u_n)$ est majorée par 2.
3. Montrer que $(u_n)$ est minorée.

## Exercice 9 :

Montrer que la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est croissante.

## Exercice 10 :

On définit la suite $(u_n)$ par la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
2. Montrer alors que $u_{n+1} < u_n$ et en déduire les variations de $(u_n)$.

3 Montrer que $(u_n)$ est majorée et minorée.

## Exercice 11 :

On considère la propriété « $3^n \geqslant 1+2n$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

1 Montrer que la propriété est initialisée.

2 Dans cette question, on décompose le travail à faire au brouillon pour justifier l'hérédité.

(a) Écrire l'hypothèse de récurrence.

(b) Écrire la propriété au rang $n+1$ (on simplifiera le membre de droite de l'inégalité).

(c) Multiplier les deux membres de l'inégalité de la question 2a par 3 puis les simplifier.

(d) Justifier que $3+6n \geqslant 3+2n$ pour tout $n \geqslant 0$.

3 Rédiger intégralement le raisonnement par récurrence permettant de justifier la propriété souhaitée.

## Exercice 12 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer par récurrence que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

## Exercice 13 :

On considère la suite $(w_n)$ définie par $w_0 = 0$ et $w_n = -\dfrac{1}{3}w_{n-1} + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer par récurrence que $1 \leqslant w_n \leqslant 4$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

## Exercice 14 :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit $n!$ qui se lit « $n$ factorielle » ou « factorielle $n$ » par :
$1! = 1$ ; $2! = 1 \times 2 = 2$ ; $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ ; etc.

1 Calculer $6!$.

2 Montrer par récurrence que $3^n \leqslant n!$ pour tout $n \geqslant 7$.

3 Montrer que $n! \leqslant n^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

## Exercice 15 :

Montrer par récurrence que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \geqslant 0$.

## Exercice 16 :

On considère la propriété « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

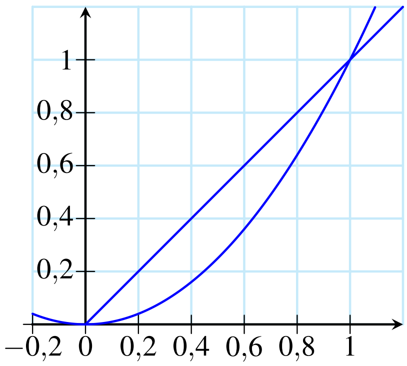
1 Recopier et compléter :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \ldots$$

2 Démontrer la propriété souhaitée par récurrence.

## Exercice 17 :

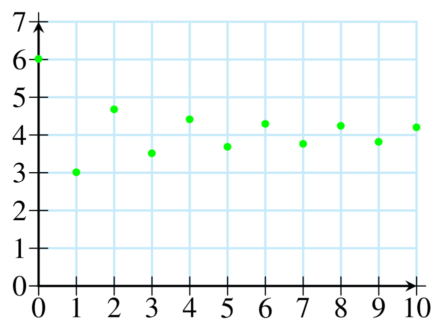
On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0{,}8$ et $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
On donne ci-contre la courbe de la fonction carrée et la droite d'équation $y = x$ :

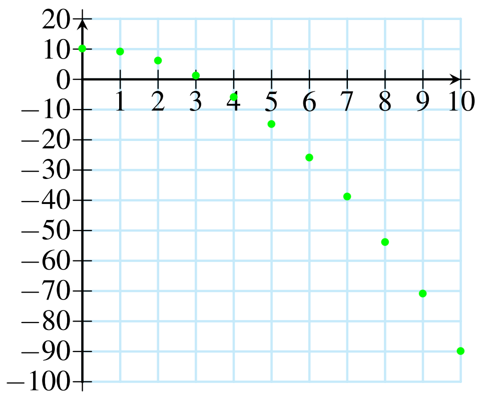


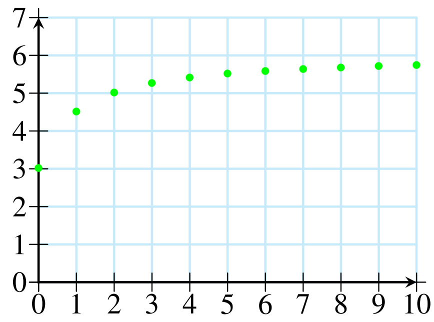
1. À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer les variations de la suite $(u_n)$.
2. Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
   Que peut-on en déduire sur les variations de $(u_n)$ ?

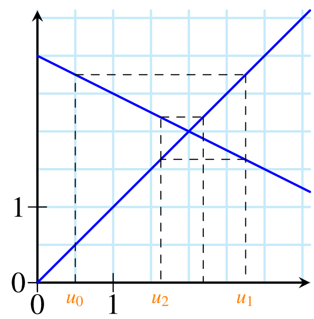
## Exercice 18 :

Pour chacune des suites représentées graphiquement ci-dessous, conjecturer un majorant, un minorant ou un encadrement.

1. 

2. 

3. 

4. 


## Exercice 19 :

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = n^2 - 4$.

1. Pour tout réel $A > 0$, déterminer le plus petit entier naturel $n_0$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

## Exercice 20 :

Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

1. Pour tous réels positifs $a$ et $b$, déterminer le plus petit entier naturel $n_0$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $5 - a < v_n < 5 + b$.
2. En déduire la limite de la suite $(v_n)$.

## Exercice 21 :

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1. Conjecturer la limite de la suite $(u_n)$.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n < -10000$.

## Exercice 22 :

Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 7$.

1. Conjecturer la limite de la suite $(v_n)$.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que $v_n > 10000$.

## Exercice 23 :

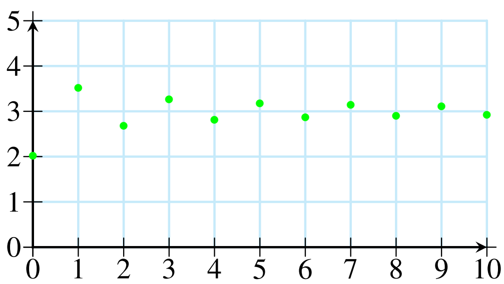
Donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 3 + 5n$.
2. $u_n = 5 + \dfrac{1}{n+1}$.
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3$.
4. $u_n = 4(-1)^n + \dfrac{1}{4}$.
5. $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$.
6. $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right) - 4$.
7. $u_n = n + (-1)^n$.

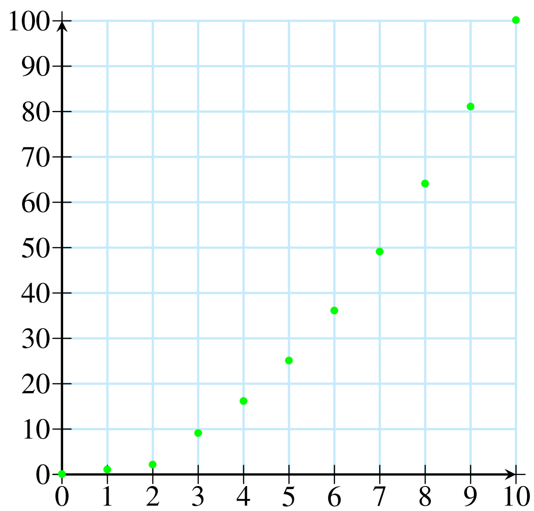
## Exercice 24 :

Pour chacune des suites représentées ci-dessous, dire quelle semble être sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$.

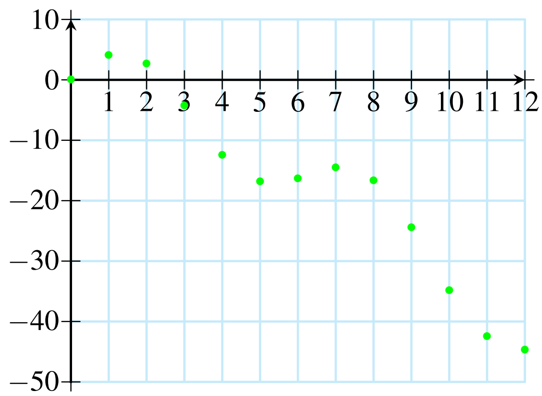
1



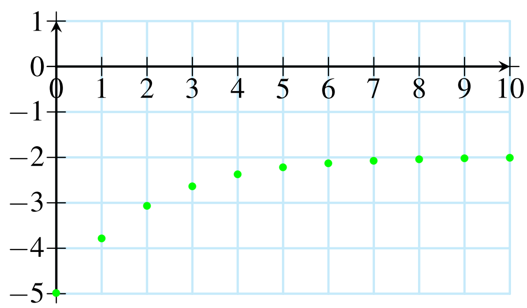

2




3




4




## Exercice 25 :

1. Montrer que la suite de terme général :

   (a) $n^2 - 4n + 6$ est minorée et en donner un minorant ;

(b) $-3n^2+9n-4$ est majorée et en donner un majorant ;

(c) $\dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$ est minorée et en donner un minorant (indication : $n^2-1=(n-1)(n+1)$) ;

(d) $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8 ;

(e) $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}$ est bornée par $-1$ et $\dfrac{1}{2}$ ;

2 Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_0=5$ et $u_{n+1}=2\sqrt{u_n-1}$ est bornée par 2 et 5.

## Exercice 26 :

Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+3=\cdots$

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+6=\cdots$

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=\cdots$

4 $\lim\limits_{n\to+\infty} 6-n^2=\cdots$

5 $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\sqrt{n}=\cdots$

6 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3}{n+1}=\cdots$

## Exercice 27 :

Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}=\cdots$

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n+2}{2n+1}=\cdots$

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10n+5}{-5n+2}=\cdots$

4 $\lim\limits_{n\to+\infty} 6+\dfrac{5}{\sqrt{n}}=\cdots$

## Exercice 28 :

Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} 11^n$.

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} -2(1{,}1)^n$.

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+8$.

4 $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times 0{,}99^{n+1}$.

5 $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^8+3n$.

6 $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^6+3n^4-5$.

7 $\lim\limits_{n\to+\infty} (6n^8+3n)(2n^6+3n^4)$.

8 $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3\sqrt{n}$.

9 $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n+8$.

10 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}5^n}{n}$.

11 $\lim\limits_{n\to+\infty} -2^n-5n^2$.

12 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5}^{2n-1}$.

13 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8-\pi^n}{4+\dfrac{3}{n}}$.

## Exercice 29 :

Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-2n$.

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3+5n^2+6n-1$.

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3-3n^4+2n^2-5n+2$.

4 $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2-7n+2)(n^3-8n+1)$.

5 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+3n+5}{-2n^2+5n-1}$.

6 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9n^7-5n^4+n}{n^2+1}$.

7 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+4n-2}{8n^3+7n^2-4n+7}$.

## Exercice 30 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2}$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 + 3\sin(n)$.
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} -5n^4 + 2n^4 \sin\left(\sqrt{n}\right)$.
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^4 - n^3 \cos\left(n^5\right)$.
5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.
6. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + \left(\sin\left(n^3\right) + \cos\left(n^2\right)\right) n$.
7. $\lim\limits_{n \to +\infty} (3 + (-1)^n)\, 0{,}7^n$.

## Exercice 31 :

1. (a) Justifier que $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1}$.

2. Déterminer les limites suivantes par comparaison après avoir trouvé une inégalité pertinente :

   (a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)^4$.
   (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{6n+5}$.
   (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+2n+3}$.
   (d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^3+1}$.
   (e) $\lim\limits_{n \to +\infty} -(n+5)^3$.
   (f) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+2)^n$.

## Exercice 32 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}(u_n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
3. On admet que la limite $\ell$ de la suite vérifie
$$\ell = \frac{1}{10}(\ell+1)^2 \text{ et } \ell \leqslant 5.$$
   Déterminer cette limite.

## Exercice 33 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{12}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{-60x+68}{-12x+5}$.

1. Étudier les variations de $f$.
2. Montrer que si $x \in [2\,;4]$ alors $f(x) \in [2\,;4]$.
3. En déduire que $(u_n)$ est bornée par 2 et 4.
4. (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{12u_n^2 - 65u_n + 68}{-12u_n + 5}$.
   (b) Dresser le tableau de signe de $\dfrac{12x^2 - 65x + 68}{-12x + 5}$.
   (c) En déduire que $(u_n)$ est croissante.
5. Que peut-on en déduire sur le comportement de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

## Exercice 34 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 4$.
   (b) Sans calcul, placer les 5 premiers termes de la suite $(u_n)$ sur l'axe des abscisses.
   (c) Conjecturer une minoration, une majoration et les variations de $(u_n)$.
2. Démontrer ces conjectures.
3. En déduire que $(u_n)$ est convergente.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

## Exercice 35 :

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est minorée par 1.
3. En déduire que la suite (un ) est convergente, sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.

## Exercice 36 :

Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)$ est strictement croissante.
2. Montrer que la suite $(v_n)$ est majorée par 1.
3. En déduire que la suite $(v_n)$ est convergente sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.

## Exercice 37 :

Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{6n+3}{n+1}$.

1. Étudier les variations de la suite $(v_n)$.
2. Montrer que $(v_n)$ est majorée par 6.
3. En déduire que la suite $(v_n)$ est convergente.