Corrigés

Exercice n°1

1. **Réponse (c)**. En effet, on choisit 5 éléments d'un ensemble de 45 éléments et l'ordre ne compte pas. Le nombre de sous-groupes de 5 éléments possibles est donc $\binom{45}{5}$.
2. **Réponse (d)**. En effet, on choisit 10 éléments d'un ensemble de 50 éléments et l'ordre compte. Il s'agit donc d'une arrangement. Le nombre de sous-groupe de 10 éléments possibles est donc A_{50}^{10}.
3. **Réponse (b)**. En effet, il y a 26 possibilités pour la première lettre, puis 26 pour la deuxième, etc. jusqu'à 26 possibilités pour la huitième. Il y a donc 26^8 possibilités d'issues. Les issues sont des 8-listes.
4. **Réponse (a)**. Il s'agit de compter le nombre d'anagrammes d'un mot où chaque lettre n'apparaît qu'une seule fois, donc il y en a $n!$, où n est le nombre de lettres (donc ici : $5!$).

Exercice n°2

1. Le mois de janvier peut commencer par « Lundi », « Mardi », ... ou « Dimanche », soit 7 possibilités.
   L'imprimeur doit donc imprimer 7 pages différentes pour le mois de janvier.
2. Le mois de février comporte 28 ou 29 jours ; il y a donc deux types de pages à créer :
   — pour les mois à 28 jours, il doit créer 7 pages différentes (car le mois peut commencer par 7 jours différents) ;
   — pour les mois à 29 jours, il doit aussi créer 7 pages différentes.
   Finalement, il doit créer $7 + 7 = 14$ pages différentes.

Exercice n°3

```
from random import randint
x = randint(-10,10)
y = randint(-10,10)
```

Remarque : La fonction `randint(a,b)` permet d'obtenir un nombre entier aléatoire compris entre a et b inclus.
Ce programme choisit au hasard un nombre entier entre -10 et 10 (inclus). Il y a donc 21 possibilités pour x et pour y.
Le nombre total de possibilités est donc $21 \times 21 = 441$.

Exercice n°4

Un octet est composé de huit bits et il y a deux possibilités pour un bit : 0 ou 1. Il y a donc $2^8 = 256$ octets possibles.

Exercice n°5

Il y a 3 entrées possibles, 6 plats possibles et 2 desserts possibles, donc il y a $3 \times 6 \times 2 = 36$ repas différents.

Exercice n°6

Un joueur dispose de cinq cartes prises parmi 52. On dit que c'est une *main* de cinq cartes.

1. On choisit 5 cartes parmi 52 et l'ordre ne compte pas. Il s'agit donc ici d'une combinaison.
   Il y a donc $\binom{52}{5} = \dfrac{52!}{5!(52-5)!} = 2598960$ mains possibles.
2. On impose dans cette question le fait qu'il y ait un Roi. Comme l'ordre ne compte pas, on peut considérer que la première est un Roi (il y a 4 choix possibles car il y a 4 Rois dans un jeu de cartes). Nous voulons exactement un Roi ; par conséquent, il ne faut pas qu'il y en ait parmi les autres cartes : on choisit donc 4 cartes parmi les $52 - 4 = 48$ cartes qui ne sont pas des Rois.
   Ainsi, il y a $4 \times \binom{48}{4} = 778320$ mains comportant exactement un Roi.
3. Nous souhaitons ici exactement deux Piques. Comme l'ordre ne compte pas, on peut considérer que ce sont les deux premières cartes. Il y a $52 \div 4 = 13$ Piques donc il y a $\binom{13}{2}$ possibilités pour ces deux cartes. Pour les 3 autres cartes, il faut les choisir parmi les $52 - 13 = 39$ cartes restantes qui ne sont pas des Piques.
   Ainsi, il y a $\binom{13}{2} \times \binom{39}{3} = 712842$ mains possibles contenant exactement 2 Piques.
4. Nous souhaitons ici 2 Piques et 1 Cœur. Selon le même principe que celui utilisé dans la question précédente, on peut dire que le nombre de mains comportant exactement 2 Piques et 1 Cœur est égal à :
$$\underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{2 Piques}} \times \underbrace{\binom{13}{1}}_{\text{1 Cœur}} \times \underbrace{\binom{26}{2}}_{\text{2 autres}} = 329550.$$

Exercice n°7

Quatre garçons et trois filles doivent s'assoir en ligne sur sept chaises.

1. Il y a 7 personnes à permuter donc il y a $7! = 5040$ façons de s'assoir.
2. Il y a deux groupes (filles et garçons), donc 2 façons de les disposer. Dans le groupe des filles, il y a $3!$ façons de les disposer et dans le groupe des garçons, il y en a $4!$.
   Il y a donc $2 \times 3! \times 4! = 288$ façons de s'assoir.
3. Dans cette question, deux garçons ne peuvent pas être à côté, et deux filles non plus.

Imaginons que les chaises soient numérotées de 1 à 7. Supposons que les garçons s'assoient sur les chaises avec un numéro impair : il y a 4! façons de les disposer. De même, il y a 3! façons de disposer les filles sur les chaises dont le numéro est pair.

Au final, il y a $4! \times 3! = 144$ façons de les assoir.

Exercice n°8

Il y a deux façons de raisonner pour cet exercice.

— *Raisonnement combinatoire.*
Le nombre de poignées de mains est égal au nombre de sous-ensembles à deux éléments que l'on peut former dans un ensemble à 50 d'éléments, à savoir $\binom{50}{2} = 1225$.
Il y a donc 1225 poignées de mains.

— *Analyse numérique.*
Le premier participant peut serrer la main à 49 personnes. Ensuite, le deuxième peut serrer la main aux 48 personnes restantes. Le troisième peut serrer la main aux 47 autres, etc. jusqu'aux deux dernières personnes qui ne peuvent donner qu'une poignée de mains.
Il y a donc $49 + 48 + 47 + \cdots + 2 + 1$ poignées de mains possibles. Or,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il y a donc $\dfrac{49 \times 50}{2} = 1225$ poignées de mains.

Exercice n°9

Il y a $2 \times 26 = 52$ lettres possibles (si on compte les majuscules et les minuscules).
Ensuite, il y a 5 possibilités pour le symbole et enfin, 10 possibilités pour le chiffre pris parmi les dix disponibles.
Il y a donc $52 \times 5 \times 10 = 2600$ possibilités pour un « mot » de trois caractères.
Il faut ensuite dénombrer les permutations du mot : il y en a $3! = 6$.

Ainsi, il y a $6 \times 2600 = 15600$ mots de passe possibles.

Exercice n°10

Un clavier comporte neuf touches : 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B et C.
Un *code* obtenu à l'aide de ce clavier est une suite d'une lettre et de trois chiffres.

1. Il y a 3 lettres possibles pour la première entrée (le premier caractère du code) et on a le choix entre 6 chiffres pour chacun des 3 chiffres suivants.
   Il y a donc $3 \times 6^3 = 648$ codes possibles.
2. Il y a toujours 3 lettres possibles pour la première entrée, puis 5 choix possibles pour chacun des 3 autres entrées.
   Il y a donc $3 \times 5^3 = 375$ codes sans « 1 ».
3. Il y a encore 3 lettres possibles pour la première entrée. Ensuite, on peut raisonner par contradiction : nous avons vu aux questions précédentes qu'il existe 375 codes sans le chiffre « 1 » et qu'il y a 648 codes possibles.
   Il y a donc $648 - 375 = 273$ codes ayant au moins un chiffre « 1 ».
4. Il y a 3 lettres possibles pour la première entrée, et il faut compter le nombre d'arrangements de 3 éléments pris parmi 6 pour avoir un code où tous les chiffres sont distincts (l'ordre compte et on peut assimiler ceci à un tirage sans remise, ce qui justifie que c'est bien un arrangement).
   Il y a donc $3 \times A_6^3 = 3 \times \dfrac{6!}{3!} = 360$ codes possibles où tous les chiffres sont distincts.
5. Ici encore, on raisonne par contradiction : le contraire de l'événement « le code comporte au moins deux chiffres identiques » et l'événement : « le code comporte des chiffres distincts ».
   Il y a donc $648 - 360 = 288$ codes comportant au moins deux chiffres identiques.

Exercice n°11

Un programme permet de générer un mot de 1 à 10 lettres en choisissant aléatoirement chacune des lettres dans un alphabet en comportant 26.

— Si le mot généré ne contient qu'une lettre alors il y a 26 possibilités.
— Si le mot contient deux lettres alors il y a 26^2 possibilités.
— Si le mot contient trois lettres alors il y a 26^3 possibilités.
— $\vdots$
— Si le mot contient dix lettres alors il y a 26^{10} possibilités.

Ainsi, le nombre total de mots possibles est :

$$26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{10}.$$

Pour rappel, si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

La somme que nous souhaitons calculer est la somme des premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 26$ et de raison $q = 26$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{10} &= 26 \times \frac{26^{10} - 1}{26 - 1} \\ &\approx 1{,}5 \times 10^{14}. \end{aligned}$$

Exercice n°12

À retenir : si un mot de n lettres comporte k lettres identiques, il y a $\dfrac{n!}{k!}$ anagrammes différentes de ce mot. S'il comporte k lettres identiques et p autres lettres identiques différentes des premières alors il y a $\dfrac{n!}{k! \times p!}$ anagrammes différentes.

1. Le mot « ABYME » contient cinq lettres distinctes. Le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de permutations de ces cinq lettres.
   Il y a donc $5! = 120$ anagrammes au mot « ABYME ».

2. Le mot « NAPPE » contient cinq lettres, mais elles ne sont pas toutes distinctes : il y a quatre lettres distinctes. Ainsi, parmi les 120 permutations, il y en a qui sont identiques. Comme il y a deux lettres identiques, il y aura deux fois les mêmes permutations (par exemple « P_1P_2NAE » et « P_2P_1NAE » donnent l'anagramme « PPNAE »). Il faut donc diviser par 2 le nombre de permutations.

   Il y a donc $\dfrac{5!}{2} = 60$ anagrammes différentes au mot « NAPPE ».

3. Le mot « KAYAK » comporte cinq lettres dont trois sont distinctes. Selon le même principe expliqué à la question précédente, il faut diviser les 120 permutations par 2 (car il y a deux « K ») et encore par 2 (car il y a deux « A »).

   Il y a donc $\dfrac{5!}{2\times 2} = 30$ anagrammes différentes au mot « KAYAK ».

4. Le mot « UBUESQUE » comporte huit lettres dont deux sont répétées : le « U » est présent trois fois et le « E » l'est deux fois. S'il faut diviser le nombre de permutations par 2 (car il y a deux « E »), il ne suffit pas de diviser encore par 3 car il y a trois « U ». En effet, il faut diviser par $3! = 6$.

   Pour mieux comprendre ceci, on peut prendre l'exemple du mot « AAAB » qui admet théoriquement $4! = 4 \times 3 \times 2$ permutations et qui admet pour anagrammes : « AAAB », « AABA », « ABAA » et « BAAA ». Il y en a donc $4 = \dfrac{4\times 3\times 2}{3\times 2} = \dfrac{4!}{3!}$.

   Ainsi, il y a $\dfrac{8!}{2\times 3!} = 3360$ anagrammes différentes au mot « UBUESQUE ».

Exercice n°13

On estime à 10^{79} le nombre d'atomes dans l'Univers visible.
Combien de cartes différentes devrait avoir un jeu pour que le nombre de permutations possibles dépasse cette valeur ? *Conseil :* n'ayez pas peur de prendre des initiatives !
Notons n le nombre de cartes différentes. Le nombre de permutations est alors égal à $n!$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :

$$n! \geqslant 10^{79}.$$

Pour résoudre cette inéquation, on peut faire appel au logarithme népérien :

$$\begin{aligned} n! \geqslant 10^{79} &\iff \ln(n!) \geqslant \ln\left(10^{79}\right) \\ &\iff \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n) \geqslant 79 \ln 10 \end{aligned}$$

On peut alors faire appel à un programme Python pour déterminer la première valeur de n pour laquelle l'inégalité est vraie.

```
from math import log
n = 1
s = 0
while s < 79*log(10) :
    n += 1
    s += log(n)
print(n)
```

Ce programme affiche la valeur « 59 ».

Il faut donc que le jeu comporte 59 cartes différentes pour que le nombre de permutations dépasse le nombre d'atomes dans l'Univers visible.

Si vous n'avez pas encore vu la notion de logarithme népérien, le programme suivant affiche aussi « 59 » :

```
f,n = 1,1
while f < 10**79 :
    n += 1
    f *= n
print(n)
```

Exercice n°14

1. Avant de traiter l'exercice, on peut pendre l'exemple d'un groupe de 4 personnes, notées a, b, c et d. Si on veut constituer deux groupes de deux personnes, on a les possibilités suivantes :

Groupe 1	Groupe 2
a avec b	c avec d
a avec c	b avec d
a avec d	b avec c

   Il y a seulement 3 possibilités alors que nos calculs nous pousseraient peut-être à dire qu'il y en a $\binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 6$ (on choisit 2 personnes parmi les 4 pour constituer le premier groupe et pour le second, on en choisit 2 parmi les deux restantes). Avec cette dernière méthode, il faut comprendre que l'on considère que les cas « Groupe 1 : a avec b, Groupe 2 : c avec d » et « Groupe 1 : c avec d, Groupe 2 : a avec b » sont distincts alors que non. Il faut donc diviser par deux le nombre de possibilités trouvés par cette méthode.

   Revenons maintenant à notre exercice : il y a $\binom{12}{2}$ façons de constituer un groupe de 2 personnes prises parmi les 12, puis $\binom{10}{5}$ façons de constituer un autre groupe de 5 personnes prises parmi les 10 restantes, et enfin une seule façon de constituer le dernier groupe de 5 personnes.

   Le nombre total de groupes possibles est donc : $\dfrac{\dbinom{12}{2} \times \dbinom{10}{5}}{2} = 8316$.

2. Pour cette question encore, prenons un cas simple. Considérons un groupe de 6 personnes, notées a, b, c, d, e et f, que l'on souhaite partager en groupes de 2. Les différents groupes possibles sont donnés dans le tableau suivant :

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
3*a avec b	c avec d	e avec f
	c avec e	d avec f
	c avec f	d avec e
3*a avec c	b avec d	e avec f
	b avec e	d avec f
	b avec f	d avec e

$\vdots$

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
3* a avec d	b avec c	e avec f
	b avec e	c avec f
	b avec f	c avec e
3* a avec e	b avec c	d avec f
	b avec d	c avec f
	b avec f	c avec d
3* a avec f	b avec c	d avec e
	b avec d	c avec e
	b avec e	c avec d

Exercice n°15

Un QCM est composé de 20 questions. Chacune d'elles propose 4 réponses possibles, dont une seule est correcte.
Une élève répond au hasard à toutes les questions.

1. Il y a 4 façons de répondre pour chacune des 20 questions. C'est une 20-liste sur un ensemble à 4 éléments (les 4 propositions).

   Donc il y a $4^{20} = 1099511627776$ façons de répondre à ce QCM.

2. Dans cette question, il ne doit y avoir que 5 bonnes réponses ; celles-ci peuvent être en n'importe quelles positions parmi les 20 questions. Il y a donc $\binom{20}{5}$ possibilités pour ces 5 réponses correctes.

   Les 15 autres questions doivent être fausses ; il y a donc 3 choix possibles pour chacune des 15 questions restantes, soit 3^{15} possibilités.

   D'après le principe multiplicatif, il y a alors $\binom{20}{5} \times 3^{15}$ façons de répondre pour avoir 5 bonnes réponses.

3. D'après ce que nous avons dit à la question précédente, il y a $\binom{20}{k} \times 3^{20-k}$ façons de répondre pour avoir k bonnes réponses.

   D'après le principe additif, le nombre de façons de répondre afin d'avoir au moins 10 bonnes réponses est égal à :

$$\sum_{k=10}^{20} \binom{20}{k} \times 3^{20-k} = 15244087642.$$

4. La probabilité d'avoir au moins 10 bonnes réponses en répondant au hasard à chacune des questions de ce QCM est donc égale à :

$$\frac{15244087642}{1099511627776} \approx 0{,}014.$$

Exercice n°16

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tous réels a et b,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. Que renvoie la fonction suivante ?

```
def binome(n) :
    c = []
    for k in range(n+1) :
        if k == 0 :
            c.append([1])
        else k == 1 :
            c.append([1 ,1])
        else :
            ligne = []
            ligne.append(1)
            for i in range(1,k) :
 ligne.append(c[k-1][i-1] + c[k-1][i])
            ligne.append(1)
            c.append(ligne)
    return c[-1]
```

3. En rentrant $n = 8$ dans le programme précédent, la fonction renvoie :

   `[1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1]`

   Donnez alors le développement de $(1+x)^8$.

Exercice n°17

Marc et Sophie sont dans une équipe d'échecs composée de 15 personnes (dont elles).
Pour participer à un grand concours, un groupe de 6 personnes doit être formé.

1. On doit ici constituer un groupe de 6 personnes prises parmi les 15 ; c'est donc une combinaison. Il y a donc $\binom{15}{6} = 5005$ groupes possibles.
2. Deux places doivent être occupées par Marc et Sophie dans le groupe de 6 personnes ; il y a $\binom{6}{2}$ façons de les occuper.
   Les 4 autres places doivent être occupées par 4 des 13 autres personnes ; il y a $\binom{13}{4}$ façons de procéder.

   D'après le principe multiplicatif, il y a donc $\binom{6}{2} \times \binom{13}{4} = 10725$ groupes contenant Marc et Sophie.
3. On ne souhaite ici dénombrer que les groupes ne contenant que Marc et les groupes ne contenant que Sophie.

   Pour les groupes ne contenant que Marc : il y a $\binom{6}{1}$ façons de placer Marc parmi les 6 places du groupe. Il y a ensuite $\binom{13}{5}$ façons de placer les 13 autres personnes (on ne prend pas en compte Sophie : il reste donc bien 13 personnes à choisir). Il y a donc $\binom{6}{1} \times \binom{13}{5}$ groupes ne contenant que Marc.

Il y a autant de groupes ne contenant que Sophie (le raisonnement est identique).

D'après le principe additif, il y a donc $2 \times \binom{6}{1} \times \binom{13}{5} = 15444$ groupes ne contenant que l'un des deux.

Exercice n°18

Lors d'un tournoi sportif, 12 équipes doivent affronter une fois les 11 autres.
L'équipe 1 doit affronter 11 équipes ; il y a donc 11 matches à prévoir pour cette équipe.
L'équipe 2 doit affronter 10 équipes en plus de l'équipe 1 déjà comptée précédemment ; il y a donc 10 matches à prévoir.
L'équipe 3 doit affronter 9 équipes en plus des équipes 1 et 2 déjà comptées. Il y a donc 9 matches à prévoir en plus pour cette équipe.
Etc.
On voit alors que l'on doit prévoir $11+10+9+\cdots+1 = \frac{11 \times 12}{2} = 66$ matches.

Autre façon de voir : il faut constituer des sous-ensembles de 2 équipes prises parmi les 12 : il y a $\binom{12}{2} = 66$ façons de procéder.

Exercice n°19

1. De 100000 à 999999, il y a $9 \times 10^5 = 900000$ nombres.

   Il y a en effet 9 possibilités (de 1 à 9) pour le premier chiffre, puis 10 possibilités (de 0 à 9) pour les 5 autres chiffres.

2. On souhaite que les 6 chiffres soient tous distincts.

   Il y a 9 choix possibles pour le premier chiffres (de 1 à 9), puis 9 choix possibles pour le deuxième chiffre (de 0 à 9 sans le chiffre choisi en premier), puis 8 choix possibles pour le 3e chiffre, etc.
   D'après le principe multiplicatif, il y a donc $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$ nombres possibles.

3. — Si le premier chiffre est pair : on a le choix entre 2, 4, 6 ou 8, donc 4 possibilités.
   Pour le deuxième chiffre, on a le choix entre 1, 3, 5, 7 ou 9, donc 5 possibilités.
   Pour le troisième chiffre, on a le choix entre 0, 2, 4, 6 ou 8, soit 5 possibilités.
   etc.
   Il y a donc $4 \times 5^5 = 12500$ nombres possibles.

   — Si le premier chiffre est impair : on a le choix en 1, 3, 5, 7 et 9, donc 5 possibilités.
   Pour les 5 autres chiffres, on a aussi le choix entre 5 chiffres.
   Il y a donc $5^6 = 15625$ nombres possibles.

   Ainsi, en tout, il y a $12500 + 15626 = 28125$ nombres possibles.