6

Dérivation & Convexité

Série d'exercices

Corrigés — Classe : Terminale Maths Spé — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables en un nombre réel a telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.
2. Application : calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(5x) - \cos(3x)}{\sin(4x) - \sin(3x)}$.

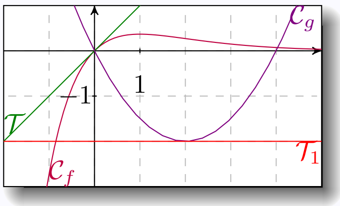
   On admet que :
   $\sin'(x) = \cos(x)$ *et* $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Exercice n°2

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{2e^{x-1}}{e^{x-1} - 1}$.

Exercice n°3



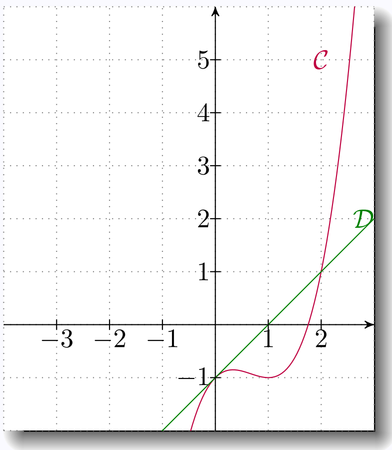
— $\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
— $\mathcal{T}_1$ est la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.
— $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 0 et 4.

À l'aide du graphique ci-dessus, répondez aux questions suivantes.

1. Que vaut $f'(0)$? $g'(2)$?
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[-2; 5]$.

Exercice n°4

Une fonction f est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous.



$\mathcal{D}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 est un minimum local.

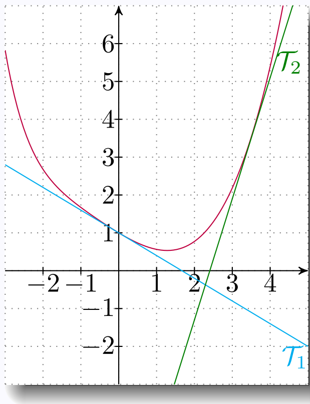
Répondre aux questions suivantes par lectures graphiques :

1. Donner la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Donner la valeur de $f'(1)$.
3. Donner, sur $[-3; 3]$, les solutions de l'équation :
$$f(x) = x - 1.$$
4. Dresser un tableau de signes de la fonction f'.

Exercice n°5

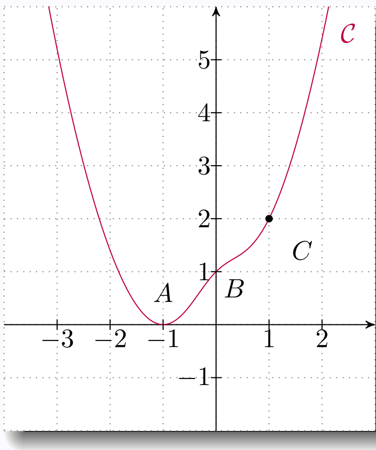
La courbe suivante représente une fonction f sur $[-3; 5]$.
La droite $\mathcal{T}_1$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
La droite $\mathcal{T}_2$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 3,5.

1. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Avec la précision que permet le graphique, déterminer $f(3{,}5)$ et $f'(3{,}5)$.
3. Dresser un tableau de signes de f' avec la précision que permet le graphique.



Exercice n°6

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est celle d'une fonction f telle que :
$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x^2 + 1}.$$



On sait :

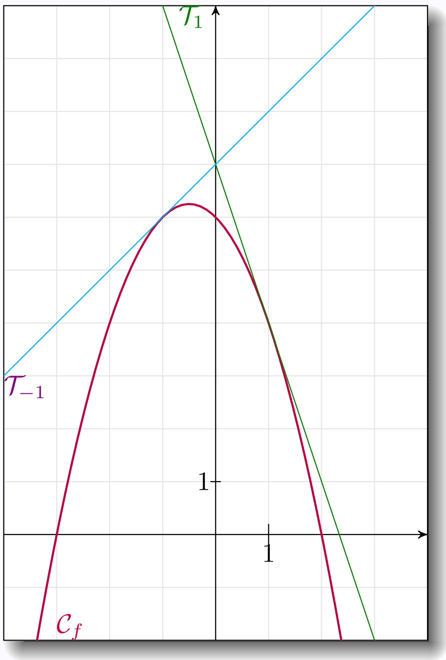
— Condition (1) : que les points $A(-1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;2)$ appartiennent à $\mathcal{C}$;

— Condition (2) : l'axe des abscisses est tangente à $\mathcal{C}$ au point A.

1. Exprimer en fonction de a, b, c et d la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.
   Quelle équation peut-on alors écrire à partir de la condition (2) ?
2. Écrire, en fonction de a, b, c et d, les trois équations que permet d'établir la condition (1).
3. Trouver à l'aide des quatre équations établies, les valeurs de a, b, c et d.

Exercice n°7

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_{-1}$.



On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Par lecture graphique, donner la valeur de $f(0)$.
   En déduire la valeur de c.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
3. Par lecture graphique, donner la valeur des nombres $f'(1)$ et $f'(-1)$.
   En déduire les valeurs de a et b.
4. Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice n°8

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-\infty;0[\cup]0;4]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathcal{D}$.
4. Interpréter graphiquement les résultats des questions 1 et 3.

Exercice n°9

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 1 ?
2. f est-elle dérivable en 1 ?
3. Justifier que f est dérivable pour tout $x \neq 1$.

Exercice n°10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & si \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \cos(x) & si \quad 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice n°11

On considère la fonction f définie sur $[-2;1]$ par : $f(x) = xe^{-x} + 2$.

1. Montrer que $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
2. En déduire les variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner alors une valeur approchée de α au centième.

Exercice n°12

On injecte par voie intraveineuse un médicament.
Le taux du produit dans le sang est modélisé par la fonction :

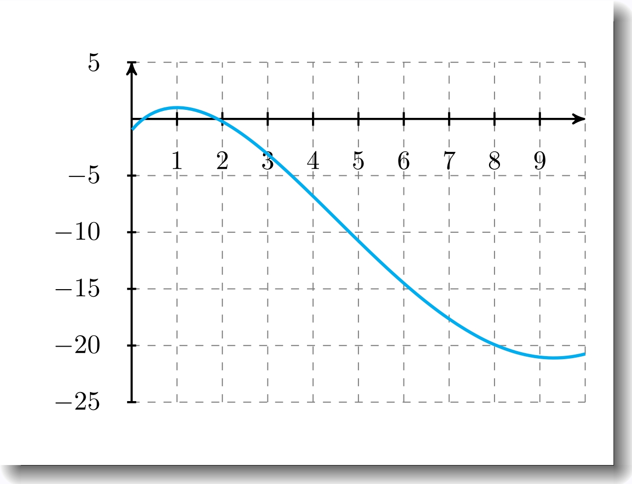
$$f(t) = (1-0{,}02t)e^{-0{,}2t} \qquad , \qquad t \in [0;50].$$

où t représente le temps après injection, exprimé en heures.

1. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0;50]$.
2. Montrer que l'équation $f(t) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $[0;50]$. En Donner alors une valeur approchée au dixième. Interpréter ce résultat.

Exercice n°13

On considère une fonction f dont la courbe représentative est la suivante :



Placer approximativement son point d'inflexion et préciser les intervalles où f est concave et convexe.

Exercice n°14

Déterminer la convexité de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°15

Lors de la propagation d'une rumeur, le nombre d'individus propageant cette rumeur x jours après son commencement est donné, en unité, par la fonction :

$$f(x) = 100 + x^4 e^{-0,1x} \qquad \text{pour } x \in [0;50].$$

1. Déterminer le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement.
2. (a) Prouver que $f'(x) = x^3(4 - 0,1x)e^{-0,1x}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0;50]$.
3. Dans cette question, on admet que la dérivée seconde de f est :

   $$f''(x) = x^2 e^{-0,1x}\left(0,01x^2 - 0,8x + 12\right).$$

   Étudier la convexité de la fonction f sur $[0;50]$.
4. En déduire :
   (a) le nombre de jours qu'il faut attendre avant que le nombre d'individus propageant cette rumeur diminue (arrondi à l'unité) ;
   (b) le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur (arrondi à l'unité) ;
   (c) le nombre de jours qu'il faut attendre avant que la croissance du nombre d'individus propageant cette rumeur diminue.

Exercice n°16

La courbe représentative de la fonction f telle que $f''(x) = (x-1)^2 e^x$ admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice n°17

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}.$$

1. En étudiant la fonction $u : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1$, déterminer le domaine de définition de $f(x)$.
   On notera α la valeur telle que $u(\alpha) = 0$.
2. Montrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse α est verticale.

Exercice n°18

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que sa dérivée est définie sur $[0;+\infty]$ par :

   $$f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\,(2 + \sqrt{x})^2}.$$

   (b) Résoudre l'équation :

   $$X^2 + 4X - 1 = 0\,,$$

   puis en déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur $[0;+\infty[$.
   Dresser alors un tableau de variations complet de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
   On veillera notamment à calculer la valeur de l'extremum de f.