Série d'exercices

Corrigés Classe : Terminale Maths Spé Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables en un nombre réel a telles que $f(a)=g(a)=0$ et $g'(a)\neq 0$.

1. On peut écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{g(x)-g(a)}$$

car, $f(a)=g(a)=0$.

Or, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ d'après la définition du nombre dérivé (vue en classe de première).

De même, $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$ donc $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{g(x)-g(a)}=\frac{1}{g'(a)}$ ($g'(a)\neq 0$ par hypothèses).

Ainsi,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{g(x)-g(a)}=f'(a)\times\frac{1}{g'(a)}$$

et donc,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

2. Posons $f(x)=\cos(5x)-\cos(3x)$ et $g(x)=\sin(4x)-\sin(3x)$.

Alors, $f'(x)=-5\sin(5x)+3\sin(3x)$ et $g'(x)=4\cos(4x)-3\cos(3x)$.

Ainsi, $f'(0)=0$ et $g'(0)=1$.

f et g vérifient toutes les conditions nécessaires pour utiliser la règle de l'Hospital donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(5x)-\cos(3x)}{\sin(4x)-\sin(3x)}=0.$$

Exercice n°2

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}$.
   - $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-1\right)=e^0-1=1-1=0$
   - $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}-1\right)=e^0-1=1-1=0$

On a donc une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » donc on pense à faire apparaître un ou plusieurs taux d'accroissement.

$$\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}=\frac{e^x-1}{x-0}\times\frac{x-0}{e^{2x}-1}.$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{u(x)-u(0)}{x-0}=u'(0)=e^0=1$ avec $u(x)=e^x$ et donc $u'(x)=e^x$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{v(x)-v(0)}=\frac{1}{v'(0)}=\frac{1}{2e^0}=\frac{1}{2}$ avec $v(x)=e^{2x}$ et donc $v'(x)=2e^{2x}$.

On en déduit alors que :

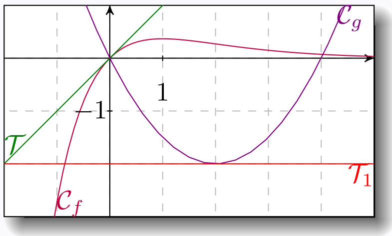
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{2e^{x-1}}{e^{x-1}-1}$.
   - $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}2e^{x-1}=1>0$
   - $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(e^{x-1}-1\right)=0^-$

Ainsi, par quotient,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{2e^{x-1}}{e^{x-1}-1}=-\infty.$$

Exercice n°3



- $\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- $\mathcal{T}_1$ est la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.
- $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 0 et 4.

À l'aide du graphique ci-dessus, répondez aux questions suivantes.

1. $f'(0)=1$ car $f'(0)$ représente le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$. Et pour calculer le coefficient directeur de cette droite, on considère deux points qui sont sur cette droite : par exemple, $A(-1;-1)$ et $O(0;0)$.

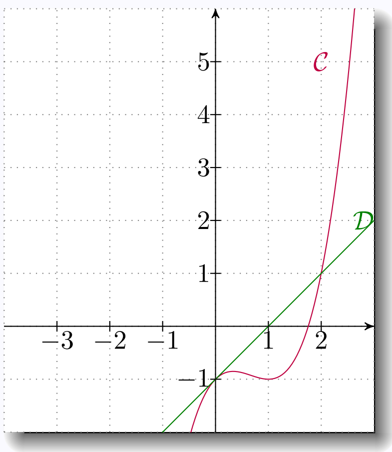
$$f'(0)=\frac{y_O-y_A}{x_O-x_A}=\frac{0-(-1)}{0-(-1)}=1.$$

$g'(2)=0$ car la tangente à $\mathcal{C}_g$ est horizontale, et comme toute droite horizontale, elle a un coefficient directeur nul.

2. $f(x)\geqslant g(x)\iff x\in[0;4]$ car c'est sur cet intervalle que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Exercice n°4

Une fonction f est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous.



$\mathcal{D}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 est un minimum local.

1. $f(0)$ est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 : c'est le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées. Donc $\boldsymbol{f(0) = -1}$.

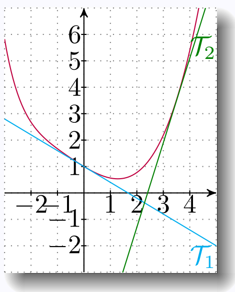
   $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. C'est donc le coefficient directeur de $\mathcal{D}$. Donc $\boldsymbol{f'(0) = 1}$ (les points de coordonnées $(0;-1)$ et $(1;0)$ sont sur la droite donc le coefficient directeur est $\dfrac{y_b - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-(-1)}{1-0} = 1$.
2. L'énoncé dit que le point de la courbe d'abscisse 1 est un minimum local. Donc $\boldsymbol{f'(1) = 0}$.
3. $\mathcal{D}$ a pour équation $y = x - 1$ (coefficient directeur égal à 1 et coupe l'axe des ordonnées en -1). Donc l'équation revient à trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

   Les solutions sont donc $x = 0$ et $x = 2$.
4. La fonction f est croissante jusqu'à $\dfrac{1}{3}$, puis décroissante jusqu'à 1, puis croissante, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice n°5

La courbe suivante représente une fonction f sur $[-3;5]$.
La droite $\mathcal{T}_1$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
La droite $\mathcal{T}_2$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 3,5.



1. $f(0) = 1$ (cela correspond à l'ordonnée du point d'abscisse 0 qui est sur la courbe).

   $f'(0) = -\dfrac{3}{5}$. Pour déterminer cette valeur, on prend deux points de la tangente à la courbe passant par le point d'abscisse $x = 0$. Les points $A(0;1)$ et $B(5;-2)$ sont sur cette tangente. On calcule alors la pente de cette droite :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-1}{5-0} = -\frac{3}{5}.$$

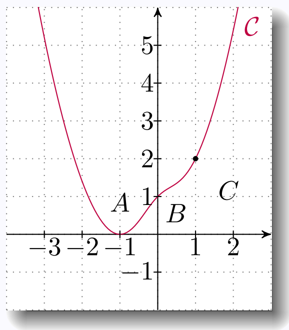
2. $f(3{,}5) \approx 3{,}5$ et $f'(3{,}5) \approx 3{,}2$.
3. Le tableau de signes de la fonction f' est le suivant :

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

Exercice n°6

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est celle d'une fonction f telle que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x^2+1}.$$



On sait :

— Condition (1) : que les points $A(-1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;2)$ appartiennent à $\mathcal{C}$;

— Condition (2) : l'axe des abscisses est tangente à $\mathcal{C}$ au point A.

1. $f'(x) = 2ax + b - \dfrac{2dx}{(x^2+1)^2}$.

   La condition (2) permet d'écrire : $f'(-1) = 0$, soit :

$$-2a + b + \frac{1}{2}d = 0.$$

2. La condition (1) permet d'écrire :
   - $A(-1;0) \in \mathcal{C} \Longrightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c + \frac{1}{2}d = 0$.
   - $B(0;1) \in \mathcal{C} \Longrightarrow f(0) = 1 \Rightarrow c + d = 1$.
   - $C(1;2) \in \mathcal{C} \Longrightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c + \frac{1}{2}d = 2$.
3. Nous avons alors le système suivant :

$$\begin{cases} -2a + b + \frac{1}{2}d = 0 & L_1 \\ c + d = 1 & L_2 \\ a - b + c + \frac{1}{2}d = 0 & L_3 \\ a + b + c + \frac{1}{2}d = 2 & L_4 \end{cases}.$$

   En soustrayant $L_4 - L_3$, on obtient à l'équation : $2b = 2$. Ainsi, $\underline{b = 1}$. Dès lors,

$$\begin{cases} -2a + \frac{1}{2}d = -1 & L_1' \\ c + d = 1 & L_2' \\ a + c + \frac{1}{2}d = 1 & L_3' \end{cases}.$$

   En faisant $(L_3') - (L_2')$, on obtient : $a - \frac{1}{2}d = 0$. Soit : $d = 2a$. L'équation (L_1') est alors équivalente à :

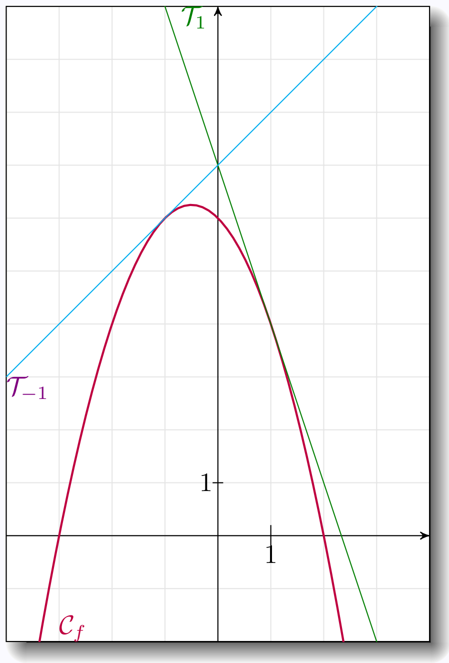
$$-d + \frac{1}{2}d = -1$$

   Soit : $d = 2$ et donc $a = 1$. L'équation (E_2') donne alors : $c + 2 = 1$, soit $c = -1$.

   Finalement, on a : $f(x) = x^2 + x - 1 + \dfrac{2}{x^2+1}$.

Exercice n°7

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_{-1}$.



On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. $f(0) = 6$ car $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée égale à 6.
   De plus, $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $\underline{c = 6}$.
2. $f'(x) = 2ax + b$.
3. $f'(1) = -3$ car le coefficient directeur de $\mathcal{T}_1$ est égal à -3.
   $f'(-1) = 1$ car le coefficient directeur de $\mathcal{T}_{-1}$ est égal à 1.
   $f'(1) = 2a + b = -3$ et $f'(-1) = -2a + b = 1$. D'où :
   $$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Longrightarrow (2a+b)+(-2a+b) = -3+1$$
   $\Longrightarrow 2b = -2 \Longrightarrow b = -1$.
   Ainsi,
   $$2a + b = -3 \Longrightarrow 2a + (-1) = -3 \Longrightarrow a = -1.$$
4. L'équation $f(x) = 0$ admet pour solutions -3 et 2. En effet, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives -3 et 2.
   $f(x) = -x^2 - x + 6$ donc son discriminant est :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25,$$
   Δ étant strictement positif, cette équation admet deux solutions :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$
   $$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3.$$

Exercice n°8

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; 4]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

1. Calculons $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Pour cela, on écrit :
   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \times \frac{\sqrt{4-x}+2}{\sqrt{4-x}+2} \\ &= \frac{(x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{4-x-4} \\ &= \frac{(x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{-x} \end{aligned}$$
   $$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left[(x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right)\right] &= -8 \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (-x) &= 0^- \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
   $$\text{(par quotient)} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$$
   $$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left[(x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right)\right] &= -8 \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-x) &= 0^+ \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
   $$\text{(par quotient)} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$$
   $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ donc f n'est pas continue en 0.
2. Calculons $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.
   $$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2} (x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right) &= 0^- \\ \lim_{x \to 2} (-x) &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
   $$\text{(par quotient)} \lim x \to 2 f(x) = 0$$
   Ainsi, $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$.
   La fonction f est par conséquent continue en 2.
3. La fonction $x \mapsto x - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \sqrt{4-x} - 2$ est dérivable partout où $4 - x > 0$, donc pour $x < 4$, et s'annule pour $x = 0$.
   La fonction $X \mapsto \dfrac{1}{X}$ est dérivable pour tout X non nul.
   Ainsi, f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 4[$.
   — **Dérivabilité en 4.**
   Le taux d'accroissement de f en 0 est :
   $$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{f(4-h) - f(4)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{2-h}{\sqrt{h}-2} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{2-h}{\sqrt{h}-2} \times \frac{\sqrt{h}+2}{\sqrt{h}+2} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{(2-h)\left(\sqrt{h}+2\right)}{h-4} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \tau(h) = -\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 4.

— **Dérivabilité en 0.**

La fonction f n'est pas continue en 0, donc elle n'est pas dérivable en 0.

4. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f (notée $\mathcal{C}$).

De plus, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \tau(h) = -\infty$ donc $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale dirigée par le bas en 4.

Exercice n°9

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

1. $$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+x+2}+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2}$$
$$= \frac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$$
$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$$
$$= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} \quad \text{si } x \neq 1$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{3}{4} = f(1)$. Par conséquent, f est continue en 1.

2. Le taux d'accroissement de f en 1 est :

$$\tau(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} - \frac{3}{4}}{x-1}$$
$$= \frac{4\sqrt{x^2+x+2}-(3x+5)}{4(x-1)^2} \times \frac{4\sqrt{x^2+x+2}+(3x+5)}{4\sqrt{x^2+x+2}+(3x+5)}$$
$$= \frac{16x^2+16x+32-9x^2-30x-25}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{x^2+x+2}+(3x+5)\right)}$$
$$= \frac{7x^2-14x+7}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{x^2+x+2}+(3x+5)\right)}$$
$$= \frac{7(x-1)^2}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{x^2+x+2}+(3x+5)\right)}$$
$$= \frac{7}{4\left(4\sqrt{x^2+x+2}+(3x+5)\right)}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1} \tau(x) = \dfrac{7}{16}$.

La limite du taux d'accroissement de f en 1 étant une valeur finie, f est dérivable en 1.

3. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+x+2}$ est dérivable pour tout x où le radicant est strictement positif, ce qui est toujours le cas car le discriminant de x^2+x+2 est strictement négatif. Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+x+2}-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $X \mapsto \dfrac{1}{X}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur$]0; +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est dérivable pour $x \neq 1$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable pour $x \neq 1$ comme produit de deux fonctions dérivables pour $x \neq 1$.

Exercice n°10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & si \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \cos(x) & si \quad 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-0^2} = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$.

Les deux limites (à droite et à gauche de zéro) sont égales, donc f est continue en 0.

2. La dérivée de $u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est $u'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, et sa limite en 0 est : $\lim\limits_{x\to 0} u'(x) = 0$.

La dérivée de la fonction $v : \cos(x)$ est $v'(x) = -\sin(x)$ et sa limite en 0 vaut : $\lim\limits_{x\to 0} v'(x) = 0$.

Les deux limites étant égales, la fonction f est dérivable en 0 (le nombre dérivé à gauche est égal au nombre dérivé à droite).

Exercice n°11

On considère la fonction f définie sur $[-2; 1]$ par : $f(x) = xe^{-x} + 2$.

1. f est de la forme $u \times v$ avec :

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1 \qquad ; \qquad v(x) = e^{-x}, \quad v'(x) = -e^{-x}.$$

D'où :
$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= 1 \times e^{-x} + \left(e^{-x}\right) \times x \\ f'(x) &= (1-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

2. $e^{-x} > 0$ pour tout réel x donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$, c'est-à-dire positif sur $[-2; 1]$ (intervalle où est définie notre fonction f).

Par conséquent, f est strictement croissante sur $[-2; 1]$.

3. Sur $[-2; 1]$,
   — f est continue (comme produit de deux fonctions continues) et strictement croissante ;
   — $f(-2) = -2e^2+2 \approx -12{,}8 < 0$ et $f(1) = e^{-1}+2 > 0$; ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre $f(-2)$ et $f(1)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $[-2; 1]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0{,}85$ (il suffit de dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ sur $[-2; 1]$ avec un pas de 0,01 pour x).

Exercice n°12

On injecte par voie intraveineuse un médicament.
Le taux du produit dans le sang est modélisé par la fonction :

$$f(t) = (1 - 0{,}02t)e^{-0{,}2t} \qquad , \qquad t \in [0;50].$$

où t représente le temps après injection, exprimé en heures.

1. f est de la forme $u \times v$ avec :
$u(t) = 1 - 0{,}02t$, $u'(t) = -0{,}02$, $v(t) = e^{-0{,}2t}$, $v'(t) = -0{,}2e^{-0{,}2t}$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= (u'v + v'u)(t) \\ &= -0{,}02e^{-0{,}2t} - 0{,}2(1 - 0{,}02t)e^{-0{,}2t} \\ &= \big[-0{,}02 - 0{,}2(1 - 0{,}02)t\big]e^{-0{,}2t} \\ &= (0{,}004t - 0{,}22)e^{-0{,}2t}. \end{aligned}$$

$e^{-0{,}2t} > 0$ pour tout réel t donc $f'(t)$ est du signe de $0{,}004t - 0{,}22$.

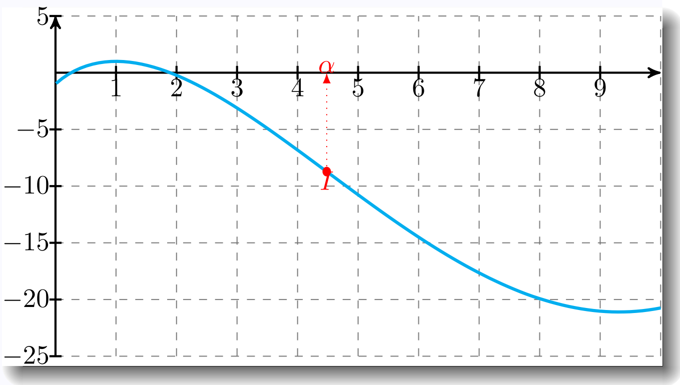
$$0{,}004t - 0{,}22 > 0 \iff t > \frac{0{,}22}{0{,}004} \iff t > 55.$$

Ainsi, $f'(t) < 0$ sur $[0;50]$. La fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

2. Sur $[0;50]$,
— f est continue et strictement décroissante ;
— $f(0) = 0$ et $f(50) = 0$ donc 0,5 est une valeur intermédiaire entre $f(0)$ et $f(50)$.
Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in [0;50]$ telle que $f(\alpha) = 0{,}5$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3{,}1$.
Cela signifie qu'au bout de 3,1 h, soit 3 heures 06 min, le taux du médicament dans le sang sera de 0,5.

Exercice n°13

On considère une fonction f dont la courbe représentative est la suivante :



Sur $]-\infty;\alpha]$, f est concave car la courbe est en dessous de ses tangentes.
Sur $[\alpha;+\infty[$, f est convexe car la courbe est au-dessus de ses tangentes.

Exercice n°14

« Déterminer la convexité d'une fonction » signifie regarder sur quels intervalles cette fonction est concave, et sur quels autres intervalles elle est convexe.
Quand il s'agit de regarder la convexité d'une fonction en ayant son expression, nous devons calculer sa dérivée et étudier le signe de cette dernière.
f est de la forme uv donc $f' = u'v + v'u$ avec :

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^{-x} \qquad v'(x) = -e^{-x}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-x} + x \times \big(-e^{-x}\big) \\ &= 1(e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1 - x)e^{-x}. \end{aligned}$$

f' est aussi de la forme uv avec :

$$u(x) = 1 - x \qquad u'(x) = -1$$
$$v(x) = e^{-x} \qquad v'(x) = -e^{-x}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times e^{-x} + (1 - x) \times \big(-e^{-x}\big) \\ &= -1e^{-x} - (1 - x)e^{-x} \\ &= \big[-1 - (1 - x)\big]e^{-x} \\ &= (-1 - 1 + x)e^{-x} \\ &= (x - 2)e^{-x}. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x,

$$e^{-x} > 0$$

donc $f''(x)$ est du signe de $x - 2$, d'où le tableau de la page suivante.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave	P.I.	convexe	

Il y a ici un point d'inflexion car $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

Exercice n°15

Lors de la propagation d'une rumeur, le nombre d'individus propageant cette rumeur x jours après son commencement est donné, en unité, par la fonction :

$$f(x) = 100 + x^4e^{-0{,}1x} \qquad \text{pour } x \in [0;50].$$

1. Le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement correspond à $f(0)$.
$f(0) = 100 + 0^4 \times e^{-0{,}1\times 0} = 100.$
Il y a donc initialement 100 personnes qui propagent initialement cette rumeur.

2. (a) La dérivée de $f(x)$ est la dérivée de $x^4e^{-0{,}1x}$ car la dérivée de 100 vaut 0.

$x^4e^{-0,1x}$ est de la forme uv avec :

$$u(x)=x^4 \qquad u'(x)=4x^3$$
$$v(x)=e^{-0,1x} \qquad v'(x)=-0,1e^{-0,1}x$$

donc :

$$\begin{aligned}
f'(x)&=(u'v+uv')(x)\\
&=4x^3e^{-0,1x}+x^4\big(-0,1e^{-0,1x}\big)\\
&=4x^3e^{-0,1x}-0,1x\times x^3e^{-0,1x}\\
&=(4-0,1x)\times x^3e^{-0,1x}\\
f'(x)&=x^3(4-0,1x)e^{-0,1x}.
\end{aligned}$$

(b) $f'(x)$ est du signe de $4-0,1x$ car une exponentielle est toujours strictement positive et $x^3\geqslant 0$ pour $x\geqslant 0$.
De plus,

$$\begin{aligned}
4-0,1x\geqslant 0 &\iff 4\geqslant 0,1x\\
&\iff \frac{4}{0,1}\geqslant x\\
&\iff 40\geqslant x
\end{aligned}$$

d'où le tableau suivant :

x	0		40		50
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	100	↗		↘	42 212

3. f est convexe si $f''(x)\geqslant 0$.
On voit que $f''(x)$ est du signe de $0,01x^2-0,8x+12$, donc le discriminant est :

$$\Delta=(-0,8)^2-4\times 0,01\times 12=0,16$$

donc les deux racines sont :

$$x_1=\frac{0,8-\sqrt{0,16}}{0,02}=20 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{0,8+\sqrt{0,16}}{0,02}=60>50.$$

Ainsi,
— $f''(x)\leqslant 0$, donc f est concave, sur $[20;50]$;
— $f''(x)\geqslant 0$, donc f est convexe, sur $[0;20]$.

4. (a) f est croissante jusqu'à $x=40$, donc il faut attendre 40 jours avant que la rumeur diminue.
(b) Le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur est $f(40)\approx 46\,988$.
(c) La notion de « diminution de croissance » correspond à la présence d'un point d'inflexion. Ici, c'est au bout de 20 jours que cela se produit (d'après la question 3).

Exercice n°16

La courbe représentative de la fonction f telle que $f''(x)=(x-1)^2e^x$ admet-elle un point d'inflexion ?

Une courbe admet un point d'inflexion uniquement lorsque la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. Or, pour tout réel x,
— $(x-1)^2\geqslant 0$, en s'annulant pour $x=1$,
— $e^x>0$.

La condition $f''(x)=0$ est bien satisfaite en $x=1$, mais $f''(x)$ ne change pas de signe en cette valeur.

Ainsi, la courbe représentative de f n'admet pas de point d'inflexion.

Exercice n°17

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{3}x^3+2x^2+1}.$$

1. La fonction f est définie pour $u(x)\geqslant 0$.

$u'(x)=x^2+4x=x(x+4)$ d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		-4		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{163}{3}$	↘	1	↗	$+\infty$

La fonction u est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-4[$. De plus, $\lim x_{x\to-\infty}f(x)=-\infty<0$ et $f(-4)>0$ donc 0 est dans $f(]-\infty;-4[)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $]-\infty;-4[$ telle que $u(x)=0$.

De plus, d'après les variations de u, $\forall x\geqslant\alpha$, $u(x)\geqslant 0$.

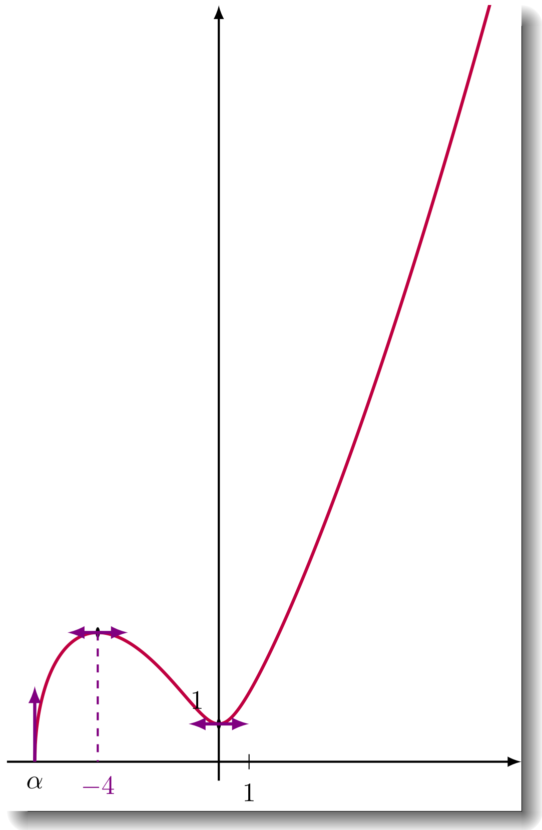
Par conséquent, f est définie sur $[\alpha;+\infty[$.

2. f est de la forme $\sqrt{u}$ donc $f'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ soit :

$$f'(x)=\frac{x^2+4x}{2\sqrt{\frac{1}{3}x^3+2x^2+1}}.$$

$\alpha\approx-6,08$ (il ne faut pas hésiter à prendre des initiatives !) donc le numérateur de $f'(\alpha)$ est à peu près égal à $12,66>0$. De plus, $u(\alpha)=0$ donc $\lim\limits_{x\to\alpha}f'(x)=+\infty$, ce qui signifie que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse α a un coefficient directeur infini, donc qu'elle est verticale.

Cela se traduit graphiquement par un « début » de courbe abrupt vers le haut (la croissante initiale est extrêmement grande), voir schéma page suivante.



Exercice n°18

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}.$$

1. On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}\,(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)} \quad \text{pour } x\neq 0\\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} \end{aligned}$$

Or,

— $\lim\limits_{x\to+\infty}(2\sqrt{x}-1)=+\infty$

— $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)=1$

Ainsi, par quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

2. (a) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x)=2x-\sqrt{x} \qquad v(x)=2+\sqrt{x}$$
$$u'(x)=2-\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v-uv'}{v^2}(x)\\ &= \frac{\left(2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2+\sqrt{x})-(2x-\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2+\sqrt{x})^2}\\ &= \frac{(4\sqrt{x}-1)(2+\sqrt{x})-(2x-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}\\ &= \frac{8\sqrt{x}+4x-2-\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}\\ &= \frac{2x+8\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}\\ f'(x) &= \frac{x+4\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2} \qquad \text{en simplifiant par 2} \end{aligned}$$

(b) Le discriminant du polynôme X^2+4X-1 est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac\\ &= 4^2-4\times1\times(-1)\\ \Delta &= 20. \end{aligned}$$

Les deux racines du polynôme sont donc :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-4-\sqrt{20}}{2} & X_2 &= \frac{-4+\sqrt{20}}{2}\\ &= \frac{-4-2\sqrt{5}}{2} & &= \frac{-4+2\sqrt{5}}{2}\\ &= -2-\sqrt{5}. & &= -2+\sqrt{5}. \end{aligned}$$

D'où le tableau de signe suivant :

X	$-\infty$		X_1		X_2		$+\infty$
X^2+4X-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f'(x)$ est du signe de $x+4\sqrt{x}-1$, c'est-à-dire de X^2+4X-1 en posant $X=\sqrt{x}$. Ainsi, $X>0$ et $x=X^2$; de plus, d'après le tableau de signes précédent,

$$\begin{aligned} x+4\sqrt{x}-1>0 &\Leftrightarrow \sqrt{x}>-2+\sqrt{5}\\ &\Leftrightarrow x>\left(-2+\sqrt{5}\right)^2\\ &\Leftrightarrow x>9-4\sqrt{5} \end{aligned}$$

x	0		$9-4\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-9+4\sqrt{5}$	↗	$+\infty$

$$\begin{aligned} f\left(9-4\sqrt{5}\right) &= \frac{2\left(9-4\sqrt{5}\right)-\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\\ &= \frac{18-8\sqrt{5}-\left(-2+\sqrt{5}\right)}{2-\left(-2+\sqrt{5}\right)}\\ &= \frac{20-9\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{-45+20\sqrt{5}}{5}\\ &= -9+4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Je précise que $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = -2+\sqrt{5}$ d'après les calculs faits précédemment.