Série d'exercices

Corrigés Classe : Tle Spé Maths Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

1. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 60°$.
Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
3. Dans un cube ABCDEFGH d'arête 4, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG}$.

Exercice n°2

1. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$\|\vec{u}\| = 3\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 45°$.
Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
3. Dans un cube ABCDEFGH d'arête a, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ en fonction de a.

Exercice n°3

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer :

1. $\|\vec{u}\|$.
2. $\|\vec{v}\|$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
4. θ.

Exercice n°4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$. Calculer :

1. $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$;
2. $\vec{v}\cdot(-\vec{u}+2\vec{v})$;
3. $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$;
4. $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})$.

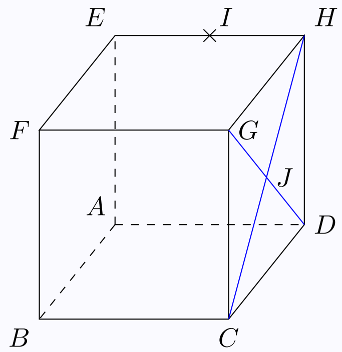
Exercice n°5

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\24\end{pmatrix}$
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

Exercice n°6

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



Exprimer en fonction de a les produits scalaires :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH}$;
3. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GC}$;
4. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FC}$;
5. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}$;
6. $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{GD}$.

Exercice n°7

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec :

1. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FI}$;
2. $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GJ}$;
3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GJ}$;
4. $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{FB}$.

Exercice n°8

Dans chacun des cas suivants, donner un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ au plan $(\mathscr{P})$ respectant les contraintes distinctes données :

1. $(\mathscr{P}) : x - 3y + z - 1 = 0$ avec $a = 2$.
2. $(\mathscr{P}) : -2x + 3y + z + 8 = 0$ avec $b = 1$.
3. $(\mathscr{P}) : -x + 4y - 5z - 7 = 0$ avec $b = -8$.
4. $(\mathscr{P}) : 2x - y + 6z - 7 = 0$ avec $c = 3$.

Exercice n°9

Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$:

1. $A(0\,;1\,;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$;
2. $A(-1\,;4\,;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$;
3. $A(-1\,;2\,;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$;

4. $A(-1\,;1\,;6)$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}8\\-4\\2\end{pmatrix}$.

Exercice n°10

On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

1. $\begin{cases}(\mathcal{P}_1): 3x-y+z=7\\(\mathcal{P}_2): -x+3y+2z=1\end{cases}$.
2. $\begin{cases}(\mathcal{P}_1): x+y+z=1\\(\mathcal{P}_2): 2x-3y+z=4\end{cases}$.
3. $\begin{cases}(\mathcal{P}_1): 2x-2y+3z=4\\(\mathcal{P}_2): 2x-3y-3z=2\end{cases}$.

Exercice n°11

On considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :
$(\mathcal{P}_1)\ :\ 3x+t^2y+(1-t)z-5=0;$
$(\mathcal{P}_2)\ :\ t^2x+(1+t)y-3z+1=0,$
où t est un réel.
Déterminer les valeurs éventuelles de t pour lesquelles les deux plans sont orthogonaux.

Exercice n°12

Pour chacune des questions suivantes, calculer la distance entre le point A et le plan $(\mathcal{P})$.

1. $(\mathcal{P})\ :\ -3x+5y+z=1\,;\ A(-3;2;1)$.
2. $(\mathcal{P})\ :\ 5x-y+3z-2=0\,;\ A(2;2;-2)$.

Exercice n°13

On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne :

$$-2x+7y+3z-1=0.$$

Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $A(-1;2;-3)$ tangente à $(\mathcal{P})$.
On rappelle qu'une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Exercice n°14

1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(1;-2;3)$ et parallèle au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $2x+5y-3z=7$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(-1;-1;1)$ et orthogonal au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x+y-z=1$.

Exercice n°15

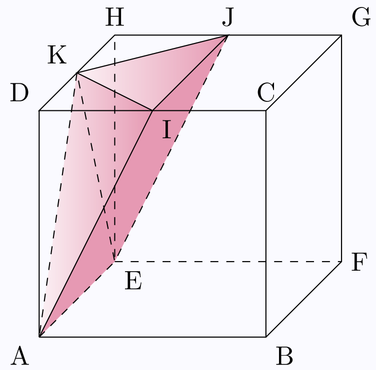
Donner les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+t\\z=-2+3t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

et du plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $2x-3y+z=2$.

Exercice n°16

Soit ABCDEFGH un cube comme représenté ci-dessous.



On place les points I, J et K respectivement au milieu des côtés [DC], [GH] et [DH]. On fixe le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (AEJI).
2. En déduire une équation cartésienne du plan (AEJI).
3. On admet que la distance du point K au plan (AEJI) est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
   En déduire le volume de la pyramide AEJIK.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, perpendiculaire au plan (AEJI) et passant par K.
   En déduire les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan (AEJI).

Exercice n°17

Trouver la représentation paramétrique de l'intersection des plans d'équations cartésiennes respectives :

$(\mathcal{P})\ :\ 2x-y-z=1\quad;\quad(\mathcal{Q})\ :\ -x+3y+z=2.$

Exercice n°18

En vous inspirant par exemple de la méthode utilisée dans la correction de l'exercice précédent, déterminer une représentation paramétrique de l'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$.

1. $(\mathcal{P})\ :\ -x+y+z=2$ et $(\mathcal{Q})\ :\ 4x-3y+5z=1$.
2. $(\mathcal{P})\ :\ 2x-y+3z=1$ et $(\mathcal{Q})\ :\ -3x+2y-7z=1$.