# Corrigés

## Orthogonalité & Distances dans l'espace

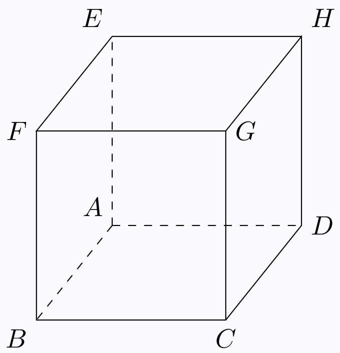
Série d'exercices | Classe : Tle Spé Maths | Lycée : Evariste Galois

### Exercice n°1

1. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$.
   $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 1 + 2\times 2 + (-1)\times 4 = 3.$
2. On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
   $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 60°$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos((\widehat{\vec{u},\vec{v}}))\\ &= 2\sqrt{3}\times 3\times\cos(60)\\ &= 6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\\ &= 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

3. Dans un cube ABCDEFGH d'arête 4. Le projeté du point G sur la droite (AC) est le point C.




Ainsi, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = AC^2 = 32.$

### Exercice n°2

1. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\times 3 + (-2)\times 0 + 1\times(-3) = -9.$
2. On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
   $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 45°$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos((\widehat{\vec{u},\vec{v}}))\\ &= 3\sqrt{2}\times 3\times\cos(45)\\ &= 9\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 9.\end{aligned}$$

3. Dans un cube ABCDEFGH d'arête $a$. Le projeté orthogonal du point F sur la droite (AB) est le point B. Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|\overrightarrow{AB}\|\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\\ &= a\times\sqrt{a^2+a^2}\times\cos(45)\\ &= a^2.\end{aligned}$$

### Exercice n°3

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. On note $\theta$ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer :

1. $\|\vec{u}\| = 2.$
2. $\|\vec{v}\| = 3.$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3.$
4. $\theta = 60°.$

### Exercice n°4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$. Calculer :

1. $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = 10$ ;
2. $\vec{v}\cdot(-\vec{u}+2\vec{v}) = 31$ ;
3. $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = -7$ ;
4. $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v}) = -15.$

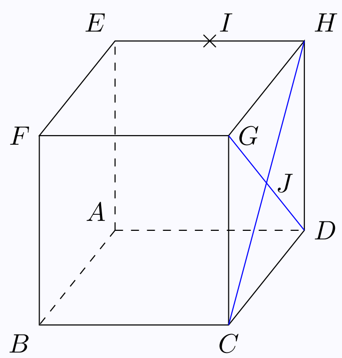
### Exercice n°5

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6$ donc non.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc oui.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc oui.
4. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\sqrt{3}$ donc non.

### Exercice n°6

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$. Soient $I$ le milieu de $[EH]$ et $J$ le centre de la face $CDHG$.




Exprimer en fonction de $a$ les produits scalaires :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = a^2$ ;
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH} = -a^2$ ;
3. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GC} = 0$ ;
4. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FC} = a^2$ ;
5. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG} = a^2$ ;
6. $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{GD} = 0.$

## Exercice n°7

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec :

1. $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI} = \dfrac{a^2}{2}$ ;
2. $\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GJ} = \dfrac{a^2}{2}$ ;
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GJ} = -\dfrac{a^2}{2}$ ;
4. $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$.

## Exercice n°8

Dans chacun des cas suivants, donner un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ au plan $(\mathscr{P})$ respectant les contraintes distinctes données :

1. $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;
2. $\vec{n}\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ;
3. $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$ ;
4. $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

## Exercice n°9

Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne du plan passant par le point $A$ et de vecteur normal $\vec{n}$ :

1. $2x - 3y + z + 1 = 0$ ;
2. $5x - y + 2z + 7 = 0$ ;
3. $-7x + 2y - 4z - 3 = 0$ ;
4. $4x - 2y + z = 0$.

## Exercice n°10

On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
Pour chaque question, déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

1. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ 8y + 7z = 10 \ (L_2) \leftarrow (L_1) + 3(L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ y = \frac{5}{4} - \frac{7}{8}z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{11}{4} - \frac{5}{8}z \\ y = \frac{5}{4} - \frac{7}{8}z \end{cases}$$

Ainsi, une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{11}{4} - \frac{5}{8}t \\ y = \frac{5}{4} - \frac{7}{8}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

2. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 5y + z = -2 \ (L_2) \leftarrow 2(L_1) - (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = -2 - 5y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 + 4y \\ z = -2 - 5y \end{cases}$$

Ainsi, une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = -2 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

3. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 4 \\ y + 6z = 2 \ (L_2) \leftarrow (L_1) - (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 - \frac{15}{2}z \\ y = 2 - 6z \end{cases}$$

Ainsi, une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 4 - \frac{15}{2}t \\ y = 2 - 6t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

## Exercice n°11

On considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :
$(\mathcal{P}_1)\ :\ 3x + t^2y + (1-t)z - 5 = 0$;
$(\mathcal{P}_2)\ :\ t^2x + (1+t)y - 3z + 1 = 0$,
où $t$ est un réel.
On sait que deux plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Un vecteur normal à $(\mathcal{P}_1)$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ t^2 \\ 1-t \end{pmatrix}$ ;

Un vecteur normal à $(\mathcal{P}_2)$ est $\vec{v}\begin{pmatrix} t^2 \\ 1+t \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 3t^2 + t^2(1+t) - 3(1-t) \\ &= t^3 + 4t^2 + 3t - 3. \end{aligned}$$

Posons alors :

$$f(t) = t^3 + 4t^2 + 3t - 3.$$

$f$ est continue, $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une valeur de $t_0$ pour laquelle $f(t_0) = 0$. Étudions les variations de $f$ :

$$f'(t) = 3t^2 + 8t + 3.$$

$f'(t)$ est donc un trinôme de degré 2, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times 3 = 64 - 36 = 28.$$

$f'(t)$ admet donc deux racines réelles :

$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{28}}{6} = \frac{-4-\sqrt{7}}{3}$$

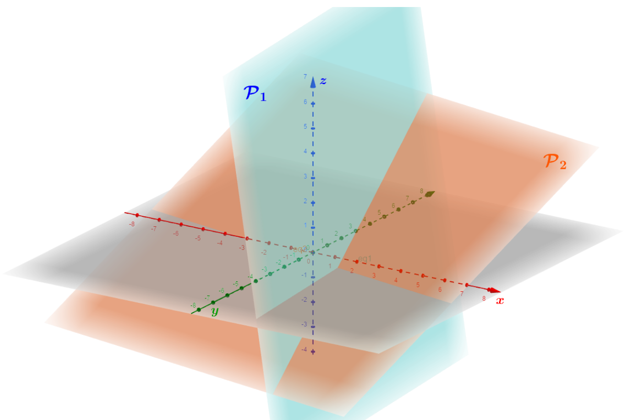
et

$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{28}}{6} = \frac{-4+\sqrt{7}}{3}.$$

On en déduit alors le tableau suivant :

| $t$ | $-\infty$ | | $\frac{-4-\sqrt{7}}{3}$ | | $\frac{-4+\sqrt{7}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-0{,}9$ | $\searrow$ | $-3{,}6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Des valeurs de ce tableau, on déduit qu'il existe une unique solution à l'équation $f(t) = 0$, supérieure à $\dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}$.
À l'aide de la calculatrice (par exemple), on arrive à une valeur approchée : $t_0 \approx 0{,}547$.
Avec cette valeur, les plans sont ainsi :




## Exercice n°12

Pour chacune des questions suivantes, calculer la distance entre le point $A$ et le plan $(\mathcal{P})$.

1. $(\mathcal{P})$ : $-3x + 5y + z = 1$ ; $A(-3; 2; 1)$.

$$\begin{aligned} d\,(\mathrm{A}\,;\mathcal{P}) &= \frac{|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|-3\times(-3) + 5\times 2 + 1 - 1|}{\sqrt{(-3)^2+5^2+1^2}} \\ &= \frac{19}{\sqrt{35}}. \end{aligned}$$

2. $(\mathcal{P})$ : $5x - y + 3z - 2 = 0$ ; $A(2; 2; -2)$.

$$\begin{aligned} d\,(\mathrm{A}\,;\mathcal{P}) &= \frac{|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|5\times 2 - 2 + 3\times(-2) - 2|}{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela signifie donc que $A \in (\mathcal{P})$, ce qui n'est pas difficile à vérifier en injectant directement les coordonnées de $A$ dans l'équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ (c'est le numérateur), et en trouvant 0.

## Exercice n°13

On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne :

$$-2x + 7y + 3z - 1 = 0.$$

Une sphère est tangente à un plan si son rayon est égal à la distance qui sépare son centre et le plan.
La distance du point $A$ au plan $(\mathcal{P})$ est :

$$\begin{aligned} d\,(\mathrm{A}\,;\mathcal{P}) &= \frac{|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|-2\times(-1) + 7\times 2 + 3\times(-3) - 1|}{\sqrt{(-2)^2+7^2+3^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{62}}. \end{aligned}$$

Le rayon de la sphère dont donc être égal à $R = \dfrac{6}{\sqrt{62}}$, donc une équation cartésienne de la sphère est :

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \frac{18}{31}.$$

## Exercice n°14

1. Notons $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point $A(1; -2; 3)$ et parallèle au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $2x + 5y - 3z = 7$.
Son équation cartésienne vérifie :

$$ax_A + by_B + cz_B + d = 0$$

soit :

$$a - 2b + 3c + d = 0. \qquad (1)$$

On sait de plus que $(\mathcal{Q})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$ donc leurs vecteurs normaux sont colinéaires :

$$\exists k \in \mathbb{R}^*,\quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 2k \\ b = 5k \\ c = -3k \end{cases}.$$

En remplaçant $a$, $b$ et $c$ dans l'équation (1), on a :

$$2k - 2(5k) + 3(-3k) + d = 0$$

soit $d = 17k$.
En prenant par exemple $k = 1$, on a alors :

$$(\mathcal{Q})\ :\ 2x + 5y - 3z + 17 = 0.$$

2. Notons $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point $A(-1; -1; 1)$ et orthogonal au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x + y - z = 1$.
Son équation cartésienne vérifie :

$$ax_A + by_B + cz_B + d = 0$$

soit :

$$-a - b + c + d = 0. \qquad (1)$$

Les deux plans sont orthogonaux donc leurs vecteurs normaux le sont aussi :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \iff a+b-c=0 \iff c=a+b.$$

L'équation (1) devient alors $d=0$.
Une équation cartésienne de $(\mathcal{Q})$ est donc, par exemple en prenant $a=b=1$ et $c=a+b=2$ :

$$(\mathcal{Q})\ :\ x+y+2z=0.$$

## Exercice n°15

Notons $I(x_I;y_I;z_I)$ l'éventuel point d'intersection de la droite et du plan.
Alors,

$$I\in(d)\iff\begin{cases}x_I=1+2t\\y_I=-2+t\\z_I=-2+3t\end{cases}\quad,\quad t\in\mathbb{R}\qquad(1)$$

et :

$$\begin{aligned}I\in(\mathcal{P})&\iff 2x_I-3y_I+z_I=2\\&\iff 2(1+2t)-3(-2+t)+(-2+3t)=2\\&\iff 2+4t+6-3t-2+3t=2\\&\iff 4t=-4\\&\iff t=-1.\end{aligned}$$

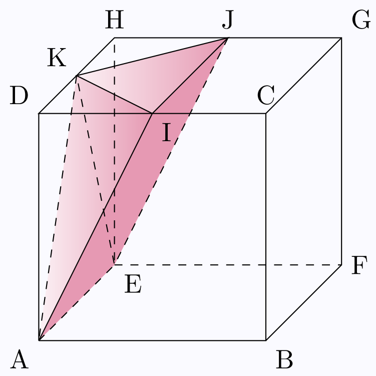
En remplaçant $t$ par $-1$ dans le système (1), on a :

$$I\in(d)\iff\begin{cases}x_I=-1\\y_I=-3\\z_I=-5\end{cases}$$

Ainsi, $I(-1;-3;-5)$.

## Exercice n°16

Soit ABCDEFGH un cube comme représenté ci-dessous.




On place les points I, J et K respectivement au milieu des côtés [DC], [GH] et [DH]. On fixe le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires et appartiennent au plan (AEJI).

   De plus, $\vec{u}.\overrightarrow{AE}=0\times1+0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times0=0$ et $\vec{u}.\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\times1+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0\times0=0$.
   Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AI}$ ; donc $\vec{u}$ est normal au plan (AEJI).
2. L'équation cartésienne du plan (AEJI) est de la forme $ax+by+cz+d=0$, où $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. Ainsi :

   $$(AEJI): x-\frac{1}{2}y+d=0.$$

   De plus, $A\in$ (AEJI) donc ses coordonnées vérifient l'équation d'où : $d=0$. On a alors :

   $$(AEJI): x-\frac{1}{2}y=0.$$
3. Le volume de la pyramide AEJIK est :

   $$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{B}\times h$$

   où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base (ici AEJI) et $h$ la hauteur (celle que nous avons calculé dans la question précédente). Donc :

   $$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times AE\times AI\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

   Ainsi :

   $$\mathcal{V}=\frac{1}{6}.$$
4. Nous savons qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est de la forme :

   $$\begin{cases}x=x_K+at\\y=y_K+bt\\z=z_K+ct\end{cases},t\in\mathbb{R}$$

   où $K(x_k;y_K,z_K)\in\mathcal{D}$ et où $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Ainsi :

   $$\begin{cases}x=t\\y=1-\frac{1}{2}t\\z=\frac{1}{2}\end{cases},t\in\mathbb{R}$$

   Nommons H le pied de la hauteur de la pyramide AEJIK issue du sommet K. Alors, $H\in\mathcal{D}$ et $H\in$ (AEJI), ce qui se traduit de façon analytique de la façon suivante (on remplace $x$ par $t$ et $y$ par $1-\frac{1}{2}t$ dans l'équation cartésienne de (AEJI)) :

   $$t-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}t\right)=0$$

   On trouve alors :

   $$t=\frac{2}{5}$$

   D'où :

   $$\begin{cases}x_H=\frac{2}{5}\\y_H=1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\\z_H=\frac{1}{2}\end{cases}$$

   Ainsi :

   $$H\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5};\frac{1}{2}\right).$$

## Exercice n°17

Il faut ici résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

La méthode consiste alors à exprimer deux inconnues en fonction de la troisième. Nous allons par exemple exprimer $x$ et $y$ en fonction de $z$. On écrit alors le système comme suit :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 + z \\ -x + 3y = 2 - z \end{cases} \qquad (1)$$

et on le résout comme si $z$ était un paramètre, et non une inconnue.
On multiplie la deuxième équation par 2 :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 + z \\ -2x + 6y = 4 - 2z \end{cases}$$

et on ajoute les deux équations :

$$5y = 5 - z \iff y = 1 - \frac{1}{5}z.$$

On reprend le système (1) et cette fois-ci, on multiplie la première équation par 3 (pour éliminer les $y$ en additionnant les équations) :

$$\begin{cases} 6x - 3y = 3 + 3z \\ -x + 3y = 2 - z \end{cases}$$

ce qui donne, en ajoutant les équations :

$$5x = 5 + 2z \iff x = 1 + \frac{2}{5}z.$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{5}z \\ y = 1 - \frac{1}{5}z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En posant par exemple $z = 5t$, on a :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}}.$$

C'est une représentation paramétrique de la droite d'intersection des deux plans.

## Exercice n°18

1. $(\mathcal{P})\ :\ -x + y + z = 2$ et $(\mathcal{Q})\ :\ 4x - 3y + 5z = 1$.
   On considère le système :

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 2 - z \\ 4x - 3y = 1 - 5z \end{cases} \qquad (1)$$

   On multiplie par 4 la première équation :

$$\begin{cases} -4x + 4y = 8 - 4z \\ 4x - 3y = 1 - 5z \end{cases}$$

   et on ajoute les deux équations : $y = 9 - 9z$.
   On multiplie par 3 la première équation dans le système (1) :

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 - 3z \\ 4x - 3y = 1 - 5z \end{cases}$$

   et on ajoute les deux équations : $x = 7 - 8z$.
   On arrive finalement à :

$$\begin{cases} x = 7 - 8z \\ y = 9 - 9z \\ z \in R \end{cases}$$

   soit, en posant $z = t$ :

$$\boxed{\begin{cases} x = 7 - 8t \\ y = 9 - 9t \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$$

2. $(\mathcal{P})\ :\ 2x - y + 3z = 1$ et $(\mathcal{Q})\ :\ -3x + 2y - 7z = 1$.
   On considère le système :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -3x + 2y - 7z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 1 - 3z \\ -3x + 2y = 1 + 7z \end{cases} \qquad (1)$$

   On multiplie par 2 la première équation :

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 - 6z \\ -3x + 2y = 1 + 7z \end{cases}$$

   et on ajoute les deux équations : $x = 3 + z$.
   On multiplie par 3 la première équation et par 2 la seconde équation dans le système (1) :

$$\begin{cases} 6x - 3y = 3 - 9z \\ -6x + 4y = 2 + 14z \end{cases}$$

   et on ajoute les deux équations : $y = 5 + 5z$.
   On arrive finalement à :

$$\begin{cases} x = 3 + z \\ y = 5 + 5z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   soit, en posant $z = t$ :

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 5t \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}}.$$