Limites & Continuité d'une fonction

Série d'exercices

Corrigés — Classe : Terminale Maths Spé — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$.

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$.
2. $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.
4. $k(x) = \dfrac{x^2+1}{\sin\frac{1}{x}}$.

Exercice n°2

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-x}{4+x}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5x-7}{x^2+3x-1}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+7x-9}{x-1}$.

Exercice n°3

À l'aide d'une expression conjuguée, déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{2x^2+x+1}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{3-x} - \sqrt{x^2-3}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{5-x} - \sqrt{10-x}\right)$.

Exercice n°4

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+1}\right)$.

Exercice n°5

Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.
Déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3x+1}{x-5}.$$

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale dont on donnera son équation.

Exercice n°7

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{7+2x}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{5x}}{3x-2}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+5)e^{2x}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}e^{-x}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} (3-\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$.

Exercice n°8

À l'aide du théorème de comparaison ou du théorème de gendarmes, calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\sin x}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(x)e^x$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - \sin x)$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+3}{x-7\sin x}$.

Exercice n°9

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{3x-5}{x-2}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{x-9}{x-3}$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} \dfrac{x^2+x+1}{2x^2-9x-5}$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+8x-9}$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{3x-5}{x^2+2x-8}$.
6. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{2x^2+3x+1}{-5x^2-x+4}$.

Exercice n°10

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2}$.
3. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos x+1}{x-\pi}$.
4. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$.

Exercice n°11

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{2e^{x-1}}{e^{x-1} - 1}$.

Exercice n°12

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$ page suivante.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2; +\infty[$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On suppose de plus que $f(5) = 0$ et que $f'(5) = -2$.

à l'aide du tableau de variations, répondre aux questions suivantes.
Aucune justification n'est demandée.

x	2		3		10		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

1. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
2. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur l'intervalle $]2; +\infty[$?

Exercice n°13

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice n°14

On définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - k & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de k la fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°15

Montrer que l'équation $3x^3 - 5x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles dont on donnera une valeur approchée à 0,001 près.

Exercice n°16

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.

Exercice n°17

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8} \end{cases}.$$

On admet que la suite (u_n) est décroissante et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

Exercice n°18

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2 + 3u_n}{4 + u_n} \end{cases}.$$

On admet que la suite (u_n) est minorée par 1 et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

Exercice n°19

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{u_n} \end{cases}.$$

On admet que la suite (u_n) est convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

Exercice n°20

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.
   (b) Contrôler en traçant la fonction f sur une calculatrice la véracité des résultats.

Exercice n°21

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β, $(\alpha < \beta)$ et que $\alpha \in [0; 1]$.

(b) Par le balayage d'une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.