Exercice n°1

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
$$= x^3\left(1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$
Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, donc
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1.$
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \sin X = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0}$.

3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
$$= \sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}$$
$$= x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} \quad \text{pour } x > 0.$$
Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1.$
Donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

4. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0^+\end{array}\right\}$
$\Rightarrow$ par quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty}$.

Exercice n°2

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3 - x}{4 + x}$.
$$\frac{3-x}{4+x} = \frac{x\left(\frac{3}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{4}{x} + 1\right)}, \quad x \neq 0$$
$$= \frac{\frac{3}{x} - 1}{\frac{4}{x} + 1}, \quad x \neq 0.$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x} - 1\right) = -1$;
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{x} + 1\right) = 1.$
Ainsi, par quotient,
$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3 - x}{4 + x} = -1.}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1}$.
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \frac{1}{x}\right)}, \quad x \neq 0$$
$$= \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}}, \quad x \neq 0.$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 1$;
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2.$
Ainsi, par quotient,
$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}}.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1}$.
$$\frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}, \quad x \neq 0$$
$$= \frac{1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0.$$
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :
— $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}\right) = 1$;
— $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$
Ainsi, par quotient,
$$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1} = 1}.$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1}$.
$$\frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1} = \frac{x^2\left(4 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}, \quad x \neq 0$$
$$= \frac{x\left(4 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2}\right)}{1 - \frac{1}{x}}, \quad x \neq 0.$$
— $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(4 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2}\right) = -\infty$;
— $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$
Ainsi, par quotient,
$$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1} = -\infty.}$$

Exercice n°3

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1} &= \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{x+2-(x-1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)=+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}=0$.

On en déduit alors que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)=0}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}}\\ &= \frac{x^2+3x+1-(2x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}}\\ &= \frac{-x^2+2x}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}}\\ &= \frac{x^2\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)}}\\ &= \frac{x^2\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}}, \text{ pour } x>0\\ &= \frac{\cancel{x}\times x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}\right]}, \text{ pour } x>0\\ &= \frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}}, \text{ pour } x>0\end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$ pour $n\in\mathbb{N}$ donc :

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-1+\frac{2}{x}\right)=-\infty$ (par produit)

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}\right)=1+\sqrt{2}>0$

Donc, par quotient, on déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)=-\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\\ &= \frac{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}\right)}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}}\\ &= \frac{3-x-x^2+3}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}}\\ &= \frac{-x^2-x+6}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}}\\ &= \frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}}\\ &= \frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\left[\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right]}\\ &= \frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right]}, \quad \text{pour } x<0\\ &= \frac{-x\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}, \quad \text{pour } x<0\end{aligned}$$

— $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[-x\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)\right]=-\infty$ (par produit)

— $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)=1$

Ainsi, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)=-\infty}$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\\ &= \frac{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}\right)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}}\\ &= \frac{5-x-10+x}{\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}}\\ &= \frac{-5}{\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}}.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5-x}=\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{10-x}=+\infty$ donc par somme,

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}\right)=+\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-5}{X}\right)=0$, en considérant que $X=\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)=0.}$$

Exercice n°4

1. $$\begin{aligned}\frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1} &= \frac{x^2\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)} \quad \text{pour } x\neq 0\\ &= \frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}} \quad \text{pour } x\neq 0\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ donc :

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right) = 2$;

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 3$.

Ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1} = \dfrac{2}{3}}$.

2. $$\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(x+\frac{3}{x}\right)} \quad \text{pour } x \neq 0$$
$$= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} \quad \text{pour } x > 0$$
$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(2+\frac{3}{x}\right)}$$

Or, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ donc :

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$;

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\dfrac{3}{x}\right) = 2$.

Par quotient, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \dfrac{1}{2}}$.

3. $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}$
$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{x^2+3-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty$. Ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right) = 0}$.

4. $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+1}$
$$= \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \quad \text{pour } x \neq 0$$
$$= x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour } x > 0$$
$$= x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = 0$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right) = 1$.

Ainsi, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+1}\right) = +\infty}$

Exercice n°5

Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

— Limite en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty.$$

Ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty}.$$

— Limite en $-\infty$.

$$f(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

De plus,

$$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty$$

donc

$$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty.$$

Ainsi, par somme,

$$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right) = -\infty.$$

Par passage à l'inverse, on a alors :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right) = 0.$$

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3x+1}{x-5}.$$

L'existence d'une asymptote horizontale est directement liée à l'existance d'une limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$.

Calculons donc, par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en notant que $f(x)$

peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-3x+1}{x-5} \\ &= \frac{x\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}, \quad x \neq 0 \\ &= \frac{-3+\frac{1}{x}}{1-\frac{5}{x}}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, par quotient, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3.$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$.

Exercice n°7

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$.
   On sait d'après le cours (croissance comparée) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, en inversant l'expression, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0.}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{7+2x}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{7+2x} &= \frac{e^x}{x\left(\frac{7}{x}+2\right)} \\ &= \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{2+\frac{7}{x}}. \end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{7}{x}} = \frac{1}{2}$.
   Ainsi, par produit, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{7+2x} = +\infty.}$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{5x}}{3x-2}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{5x}}{3x-2} &= \frac{e^{5x}}{\frac{3}{5}\times 5x - 2} \\ &= \frac{e^{5x}}{\frac{3}{5}\left(5x - \frac{2}{\frac{3}{5}}\right)} \\ &= \frac{e^{5x}}{\frac{3}{5}\left(5x-\frac{10}{3}\right)} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{e^{5x}}{5x-\frac{10}{3}} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{e^{5x}}{5x\left(1-\frac{10}{3\times 5x}\right)} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{e^{5x}}{5x} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3x}}. \end{aligned}$$

   — $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{5x}}{5x} \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ en posant $X = 5x$;
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{3x}\right) = 1$;
   — $\frac{5}{3} > 0$.
   Ainsi, par produit, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{5x}}{3x-2} = +\infty.}$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+5)e^{2x}$.
   On va tenter de faire apparaître la croissance comparée $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

$$\begin{aligned} (x+5)e^{2x} &= \left(\frac{1}{2}\times 2x + 5\right) e^{2x} \\ &= \frac{1}{2} \times 2xe^{2x} + 5e^{2x}. \end{aligned}$$

   — $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$, avec $X = 2x$;
   — $\lim\limits_{x\to-\infty} 5e^{2x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
   Ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} (x+5)e^{2x} = 0.}$$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}e^{-x}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1}e^{-x} &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x} \\ &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{e^x}, \quad x>0 \\ &= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{e^x}, \quad x>0 \\ &= \frac{x}{e^x} \times \sqrt{1+\frac{1}{x}}, \quad x>0. \end{aligned}$$

   — $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$;
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$.
   Ainsi, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}e^{-x} = 0.}$$

Exercice n°8

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\sin x}{x^2}$. Pour tout réel x non nul,

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \sin x \leqslant x &\iff -1 \leqslant -\sin x \leqslant 1 \\ &\iff 0 \leqslant 1-\sin x \leqslant 2 \\ &\iff 0 \leqslant \frac{1-\sin x}{x^2} \leqslant \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

   Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

   donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sin x}{x^2} = 0.}$$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos(x)e^x$.
Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \iff -e^x \leqslant \cos(x)e^x \leqslant e^x.$$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \cos(x)e^x = 0}$$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sin x)$. Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant -\sin x \leqslant x \iff \boxed{x^2 - 1 \leqslant x^2 - \sin x} \leqslant x^2 + 1$$

En tenant compte de ce qui est encadré, et d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty \iff \boxed{\lim_{x \to +\infty} (x^2 - \sin x) = +\infty}$$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x+3}{x - 7\sin x}$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ \iff & -7 \leqslant -7\sin x \leqslant 7 \\ \iff & x - 7 \leqslant x - 7\sin x \leqslant x + 7 \\ \iff & \frac{1}{x+7} \leqslant \frac{1}{x - 7\sin x} \leqslant \frac{1}{x-7} \\ \iff & \frac{4x+3}{x+7} \leqslant \frac{4x+3}{x - 7\sin x} \leqslant \frac{4x+3}{x-7} \qquad \text{car } 4x+3 > 0. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x+3}{x \pm 7} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x}{x} = 4$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{4x+3}{x - 7\sin x} = 4.}$$

Exercice n°9

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{3x-5}{x-2}$.
— $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (3x - 5) = 3 \times 2 - 5 = 1 > 0$
— $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (x - 2) = 0^-$ (« 0 » par valeurs négatives)

Or, $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{X} = -\infty$ donc :

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{3x-5}{x-2} = -\infty.$$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{x-9}{x-3}$.
— $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} (x - 9) = 3 - 9 = -6 < 0$
— $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} (x - 3) = 0^+$

Or, $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \dfrac{-6}{X} = -\infty$ donc :

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{x-9}{x-3} = -\infty.$$

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} \dfrac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 9x - 5}$.
— $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} (x^2 + x + 1) = 5^2 + 5 + 1 = 31 > 0$
— Remarquons que les racines de $2x^2 - 9x - 5$ sont $-\dfrac{1}{2}$ et 5.
Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} (2x^2 - 9x - 5) = 0^-$ car en prenant $x = 0$ (entre les racines), on trouve $-5 < 0$.

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 9x - 5} = -\infty.$$

4. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 8x - 9}$.
— $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (3x^2 - 5x + 2) = 0$.
— $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 + 8x - 9) = 0$.

Par conséquent, « 1 » est une racine du numérateur et du dénominateur. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 8x - 9} &= \frac{(x-1)(3x-2)}{(x-1)(x+9)} \\ &= \frac{3x-2}{x+9}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 8x - 9} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{3x-2}{x+9} = \frac{3 \times 1 - 2}{1 + 9} = \frac{1}{10}.$$

5. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{3x-5}{x^2 + 2x - 8}$.
— $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (3x - 5) = 3 \times 2 - 5 = 1 > 0$;
— Remarquons que $x^2 + 2 - 8$ admet pour racines -4 et 2, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x^2 + 2x - 8) = 0^+$ (en prenant $x = 3$, donc entre les racines, on trouve $7 > 0$).

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{3x-5}{x^2 + 2x - 8} = +\infty.$$

6. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4}$
— $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (2x^2 + 3x + 1) = 0$
— $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (-5x^2 - x + 4) = 0$

Cela signifie que l'on peut factoriser par $x - (-1) = x + 1$ au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4} = \frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(4-5x)} = \frac{2x+1}{4-5x} \text{ pour } x \neq -1.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{2x+1}{4-5x} = \frac{-1}{9}.$$

Exercice n°10

1. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)}\times\sqrt{(x+1)}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}$
$$= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$
Notons que le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ est $]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$ donc quand on parle de la limite de $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ en 1, il est sous-entendu que $x>1$.
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+1) = 2 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1) = 0^+ \end{array}\right\}$$
$\Rightarrow$ par quotient : $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$.
Or, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = +\infty$.

2. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2}$
$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}$$
$$= \frac{x^2+x-2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}$$
$$= \frac{x^2+x-6}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}$$
On factorise x^2+x-6 en calculant son discriminant.
$$= \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}$$
$$= \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}+2} \quad \text{pour } x \neq 2$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}+2} = \frac{2+3}{\sqrt{2^2+2-2}+2} = \frac{5}{4}.$$
Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2} = \frac{5}{4}$.

3. On pose $u(x)=\cos x$. Alors, $u'(x) = -\sin x$ et :
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{u(x)-u(\pi)}{x-\pi} = u'(\pi) = -\sin\pi = 0.$$
Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi} = 0$.

4. On pose $u(x)=\sqrt{x+1}$. Alors, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$
En effet,
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{u(x)-u(1)}{x-1}\\ &= u'(1)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Exercice n°11

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}$.
— $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(e^x-1\right) = e^0-1 = 1-1 = 0$
— $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(e^{2x}-1\right) = e^0-1 = 1-1 = 0$

On a donc une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ » donc on pense à faire apparaître un ou plusieurs taux d'accroissement.
$$\frac{e^x-1}{e^{2x}-1} = \frac{e^x-1}{x-0}\times\frac{x-0}{e^{2x}-1}.$$
— $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{u(x)-u(0)}{x-0} = u'(0) = e^0 = 1$ avec $u(x)=e^x$ et donc $u'(x)=e^x$;
— $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{v(x)-v(0)} = \frac{1}{v'(0)} = \frac{1}{2e^0} = \frac{1}{2}$ avec $v(x)=e^{2x}$ et donc $v'(x)=2e^{2x}$.

On en déduit alors que :
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}.$$

2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{2e^{x-1}}{e^{x-1}-1}$.
— $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2e^{x-1} = 2 > 0$
— $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(e^{x-1}-1\right) = 0^-$.

Ainsi, par quotient,
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{2e^{x-1}}{e^{x-1}-1} = -\infty.$$

Exercice n°12

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2;+\infty[$ page suivante.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2;+\infty[$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On suppose de plus que $f(5)=0$ et que $f'(5)=-2$.

à l'aide du tableau de variations, répondre aux questions suivantes.
Aucune justification n'est demandée.

x	2		3		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

1. La tangente à $\mathcal{C}$ en $x=3$ est horizontale ; comme $f(3)=6$, son équation est : $\underline{y=6}$.
2. Il y a deux solutions à l'équation $f(x)=4$: l'une sur l'intervalle $[2;3]$ et l'autre sur l'intervalle $[3;10]$.

Exercice n°13

$$f(x) = \begin{cases}(x-1)^2+3 & \text{si } x \leqslant 1\\ x+2 & \text{si } x > 1\end{cases}$$

— Sur $]-\infty;1[$, f est une fonction polynôme de degré 2 donc continue ;
— sur $]1;+\infty[$, f est une fonction affine donc continue ;
— de plus, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = (1-1)^2+3 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 1+2 = 3$, donc f est continue en 1.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°14

$$g(x) = \begin{cases} x^2+3x-k & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, g est continue comme fonction polynôme d'une part, et exponentielle d'autre part.
Pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut que g soit continue en 0, c'est-à-dire que :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \left(x^2+3x-k\right) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(e^x+2\right),$$

soit quand :

$$-k = e^0+2 \qquad \text{donc} \qquad k=-3.$$

Exercice n°15

Posons $f(x) = 3x^3-5x+1$.
— $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
— $f'(x) = 9x^2-5$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{5}}{3}$		$\frac{\sqrt{5}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	3,48	↘	−1,48	↗	$+\infty$

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 3{,}48 \quad ; \quad f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx -1{,}48.$$

— Notons $I_1 = \left]-\infty;-\frac{\sqrt{5}}{3}\right[$, $I_2 = \left]-\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{\sqrt{5}}{3}\right[$ et $I_3 = \left]\frac{\sqrt{5}}{3};+\infty\right[$.
f est continue et strictement monotone sur I_k, $k=1,\ 2,\ 3$.
De plus, d'après les variations de f, $0 \in f(I_k)$, $k=1,\ 2,\ 3$.

Ainsi, d'après le théorème de bijection appliqué sur chacun des intervalles I_k, $k=1,\ 2,\ 3$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution que chacun d'eux.
Donc l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions réelles :
— $\alpha \approx -1{,}381$;
— $\beta \approx 0{,}205$;
— $\gamma \approx 1{,}176$.

Exercice n°16

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f(0)=1$ et $f(1)=0$.
Posons $g(x) = f(x)-x$.
— $g(0) = f(0)-0 = 1-0 = 1 > 0$;
— $g(1) = f(1)-1 = 0-1 = -1 < 0$;
— g est continue (car c'est la somme de deux fonctions continues) sur $[0;1]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution sur $]0;1[$, ce qui signifie qu'il en est de même pour l'équation $f(x)=x$ car $g(x)=0 \iff f(x)=x$.

Exercice n°17

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8} \end{cases}.$$

On admet que la suite (u_n) est décroissante et convergente vers ℓ.

La fonction f associée à la suite (u_n) est $f(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{x^2+8}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est la composée des deux fonctions $x \longrightarrow \sqrt{x}$ continue sur $[0;+\infty[$ et $x \longrightarrow x^2+8$ positive est continue sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $\ell = \dfrac{1}{3}\sqrt{\ell^2+8} \Leftrightarrow (3\ell)^2 = \ell^2+8$. Ce qui entraine que $\ell^2=1$ soit $\ell=1$ ou $\ell=-1$.

Par ailleurs, la suite (u_n) est positive donc $\ell \geqslant 0$. Ainsi, $\ell=1$ est la solution qui convient.

Exercice n°18

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n} \end{cases}.$$

On admet que la suite (u_n) est minorée par 1 et convergente vers et convergente vers ℓ.
La fonction f associée à la suite (u_n) est $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$.
La fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ car f est le quotient des deux fonctions affine.
D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $\ell = \dfrac{2+3\ell}{4+\ell} \Leftrightarrow \ell(4+\ell) = 2+3\ell$, lorsque $\ell \neq -4$.
Ce qui entraine que $\ell^2+\ell-2=0$.
Le discriminent de cette équation du second degré est égal à : $\Delta = b^2-4ac = 1-4\times1\times(-2) = 9$.
Δ étant strictement positif, l'équation admet deux solutions : $\ell_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\ell_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
Par ailleurs, la suite (u_n) est minorée par 1 donc $\ell \geqslant 1$.
Par conséquent, $\ell=1$ est la solution qui convient.

Exercice n°19

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{u_n} \end{cases}.$$

On admet que la suite (u_n) est convergente vers ℓ.

a fonction f associée à la suite (u_n) est $f(x) = xe^x$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est le produit de deux fonctions continuent sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $\ell = \ell e^{\ell} \Leftrightarrow \ell(e^{\ell} - 1) =$. Ce qui entraine que $\ell = 0$.

Exercice n°20

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.
   (b) Contrôler en traçant la fonction f sur une calculatrice la véracité des résultats.

Exercice n°21

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β, $(\alpha < \beta)$ et que $\alpha \in [0; 1]$.
   (b) Par le balayage d'une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.