Série d'exercices

Corrigés Classe : Tle Spé Maths Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $\ln 8 - \ln 2$.
2. $\ln 6 + \ln 3$.
3. $\ln 25 - \ln 30 + \ln 10$.
4. $\ln 50 + \ln 2 - \ln 10$.
5. $3\ln 4 - \ln 256$.
6. $2\ln 2 - \ln 16 + \ln 128$.
7. $\ln e^{2x}$.
8. $\ln e^{2x-4} - \ln e^{2x+4}$.
9. $\dfrac{3\ln e^{x+1}}{2\ln e^{1-x}}$.

Exercice n°2

Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$.
2. $\ln(4-2x) = \ln(x-1)$.
3. $\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2-2x+1)$.
4. $\ln(2x^2-10x+8) = \ln(3x^2-3x-18)$.
5. $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$.
6. $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$.

Exercice n°3

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(5x-1) = 2$.
2. $e^{-x} = 5$.
3. $\ln(3x-1) < 0$.
4. $e^{5-x} \leqslant 2$.

Exercice n°4

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(5x+20) > \ln(3x-9)$.
2. $\ln(8-2x) \leqslant \ln(5x-25)$.
3. $\ln(x^2+1) < \ln(2x^2+x+2)$.
4. $\ln(2x^2-3x+1) > \ln(-5x^2+8x-3)$.
5. $\ln(x^2-5x-14) \geqslant \ln(2x^2-10x+8)$.
6. $\ln(x^2+x-6) > \ln(-2x^2+14x+16)$.

Exercice n°5

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln x - x.$$

1. Étudier les variations de f sur $[1;+\infty[$.
2. En déduire que pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln x < x$.
3. Déduire alors que pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{2x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
4. Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}\ln\left(x^2+1\right).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   Indice : on pourra démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$ en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$. Cela pourra nous servir dans notre raisonnement.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice n°7

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x+1}}\right)$.

Exercice n°8

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = x\ln x - x$.
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
3. $f_3(x) = \ln\left(x^2\right)$.
4. $f_4(x) = \ln\sqrt{x+1}$.
5. $f_5(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$.
6. $f_6(x) = \ln(\ln x)$.

Exercice n°9

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}.$$

Exercice n°10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variations de f sur son domaine de définition.
3. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.

   Dresser un tableau de variations complet de la fonction f.

Exercice n°11

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)\ln\left(x^2 - 2x + 1\right).$$

1. Donner le domaine de définition de f. On le notera $\mathcal{D}$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Trouver le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}$, puis en déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$.

   Dresser un tableau de variations complet de f.

Exercice n°12

Dans cet exercice, on acceptera la propriété suivante :

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b, \qquad a\ln b = \ln\left(b^a\right).$$

(Dans le cours, nous avons vu qu'elle était vraie pour a entier)

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = e\ln x - x.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser un tableau de variations de f.
4. Comparer alors les nombres π^e et e^π.

Exercice n°13

Lorsque l'on prend des antibiotiques, la concentration de bactéries présentes dans le corps d'une personne malade diminue avec le temps en suivant le modèle d'une fonction f définie, pour $0 \leqslant t \leqslant 6$, par :

$$f(t) = ae^{kt} + b \quad , \quad a, b, k \text{ étant trois réels, avec } a \neq 0,$$

où t désigne le temps (exprimé en jour) et où $f(t)$ représente le taux de bactéries restantes.
Ainsi, $f(0) = 1$. On suppose que la totalité des bactéries sont éliminées après 6 jours. Donc $f(6) = 0$.

1. Montrer que $f(t) = ae^{\frac{1}{6}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)t} + 1 - a$.
2. On sait que 50% des bactéries disparaissent au bout de deux jours.

   En déduire que $ae^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)} + \dfrac{1}{2} - a = 0$.

Pour tout nombre réel $x > 1$, on pose :

$$g(x) = xe^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} - x + \frac{1}{2}.$$

3. Montrer que $g'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{3x-3}\right)e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} - 1$.
4. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} g'(x)$.

   (b) On admet que $g''(x) = \dfrac{-2}{9x(x-1)}e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$.

   En déduire les variations de la fonction g' puis celles de la fonction g sur $]1;+\infty[$.
5. Montrer alors que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $]1{,}3;1{,}4[$.

   On admet que $\alpha \approx 1{,}309$.

Exercice n°14

Soit f la fonction définie pour tout réel $x > -1$ par :

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 6x - 1.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = \ln(x+1) - 5$.
3. En déduire les variations de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ et une autre sur $[395;400]$.

   En donner une valeur approchée au millième.

Exercice n°15

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2}.$$

1. Montrer que sa dérivée est : $h'(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{2x^3}$.
2. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. Dresser un tableau de variations de h sur $]0;+\infty[$.

   En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(x^2+1\right)\ln x - x.$$

1. Calculer sa dérivée puis montrer l'équivalence suivante : $f'(x) > 0 \iff h(x) > 0$.
2. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   (c) Dresser un tableau de variations complet de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α, sur $]0;+\infty[$.

   (b) Montrer que α appartient à l'intervalle $]1;2[$.

   (c) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.