Exercice n°1

1. $\ln 8 - \ln 2 = \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \ln 4$ (que l'on peut aussi mettre sous la forme $2\ln 2$).
2. $\ln 6 + \ln 3 = \ln(6 \times 3) = \ln 18$.
3. $\ln 25 - \ln 30 + \ln 10 = \ln\left(\frac{25}{30} \times 10\right) = \ln \frac{25}{3}$.
4. $\ln 50 + \ln 2 - \ln 10 = \ln\left(\frac{50 \times 2}{10}\right) = \ln 10$.
5. $3\ln 4 - \ln 256 = 3\ln\left(2^2\right) - \ln\left(2^8\right) = 6\ln 2 - 8\ln 2 = -2\ln 2$.
6. $2\ln 2 - \ln 16 + \ln 128 = 2\ln 2 - \ln 2^4 + \ln 2^7 = 2\ln 2 - 4\ln 2 + 7\ln 2 = 5\ln 2$.
7. $\ln e^{2x} = 2x$.
8. $\ln e^{2x-4} - \ln e^{2x+4} = 2x - 4 - (2x+4) = -8$.
9. $\frac{3\ln e^{x+1}}{2\ln e^{1-x}} = \frac{3(x+1)}{2(1-x)} = \frac{3x+3}{2-2x}$.

Exercice n°2

1. $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$.
   — **Domaine de définition :**
   Il faut que $\begin{cases} 3x-4>0 \\ 2x+1>0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$, donc que $x > \frac{4}{3}$.
   — **Résolution :**
   $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$
   $\iff 3x-4 = 2x+1 \iff x = 5$.
   $5 > \frac{4}{3}$ donc l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{5\}$.
2. $\ln(4-2x) = \ln(x-1)$.
   — **Domaine de définition :**
   Il faut que $\begin{cases} 4-2x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases}$, donc que $1 < x < 2$.
   — **Résolution :**
   $\ln(4-2x) = \ln(x-1)$
   $\iff 4-2x = x-1 \iff 5 = 3x \iff x = \frac{5}{3}$.
   $1 < \frac{5}{3} < 2$ donc l'ensemble solution de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.
3. $\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2-2x+1)$.
   — **Domaine de définition :**
   Il faut que $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2-2x+1>0 \end{cases}$.
   Or, le discriminant de x^2+x+1 est égal à -3 donc ce polynôme est toujours strictement positif. De plus, $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ donc seul $x = 1$ ne convient pas. Le domaine de définition est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   — **Résolution :**
   $\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2-2x+1)$
   $\iff x^2+x+1 = x^2-2x+1$
   $\iff 3x = 0$
   $\iff x = 0$.
   $0 \in \mathcal{D}$ donc l'ensemble solution de l'équation est $mathcal{S} = \{0\}$.
4. $\ln(2x^2-10x+8) = \ln(3x^2-3x-18)$.
   — **Domaine de définition :**
   Il faut que $\begin{cases} 2x^2-10x+8>0 \\ 3x^2-3x-18>0 \end{cases}$.
   Le discriminant de $2x^2-10x+8$ est $\Delta_1 = 100-64 = 36$ et donc ses racines sont $\frac{10-6}{4} = 1$ et $\frac{10+6}{4} = 4$.
   Le polynôme est donc strictement positif sur $]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$.
   Le discriminant de $3x^2-3x-18$ est $\Delta_2 = 9+216 = 225$ et donc ses racines sont $\frac{3-15}{6} = -2$ et $\frac{3+15}{6} = 3$.
   Le polynôme est donc strictement positif sur $]-\infty;-2[\cup]3;+\infty[$.
   Le domaine de définition est donc $\mathcal{D} =]-\infty;-2[\cup]4;+\infty[$.
   — **Résolution :**
   $\ln(2x^2-10x+8) = \ln(3x^2-3x-18)$
   $\iff 2x^2-10x+8 = 3x^2-3x-18$
   $\iff x^2+7x-26 = 0$.
   Le discriminant de $x^2+7x-26$ est $\Delta = 49+104 = 153$ donc il admet deux racines : $\frac{-7-\sqrt{153}}{2} \in \mathcal{D}$ et $\frac{-7+\sqrt{153}}{2} \notin \mathcal{D}$.
   L'ensemble solution de l'équation est donc : $\mathcal{S} = \left\{\frac{-7-\sqrt{153}}{2}\right\}$.
5. $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$. Posons $X = \ln x$.
   L'équation devient : $X^2 - 3X + 2 = 0$ et admet pour solutions $X = 1$ et $X = 2$.
   Ainsi, $\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$, soit $x = e$ ou $x = e^2$.
   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{e \ ; \ e^2\}$.
6. $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$. Posons $X = \ln x$.
   L'équation devient $2X^2 - 5X - 3 = 0$ et admet pour solutions $X = 3$ et $X = -\frac{1}{2}$.
   Ainsi, $\ln x = 3$ ou $\ln x = -\frac{1}{2}$.
   Soit, $x = e^3$ ou $x = e^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{e^3 \ ; \ e^{-0,5}\}$.

Exercice n°3

Résolution d'équations et d'inéquations.

1. — Pour résoudre l'équation $\ln(5x-1) = 2$, il faut avant tout trouver son domaine de définition.
   $\ln(5x-1)$ est défini pour tout réel x tel que $5x-1>0$,

soit $x > \dfrac{1}{5}$.
Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\left]\dfrac{1}{5};+\infty\right[$.

— $\ln(5x-1)=2 \iff e^{\ln(5x-1)}=e^2$
$$\iff 5x-1=e^2$$
$$\iff 5x=e^2+1$$
$$\iff x=\frac{e^2+1}{5}.$$

— On vérifie que la valeur trouvée est bien dans le domaine de définition en en trouvant une valeur approchée.
Par conséquent, $S=\left\{\dfrac{e^2+1}{5}\right\}$.

2. $e^{-x}=5 \iff \ln\left(e^{-x}\right)=\ln(5)$
$$\iff -x=\ln(5)$$
$$\iff x=-\ln(5)=\ln\frac{1}{5}$$
Par conséquent, $S=\{-\ln 5\}$.

3. — Pour résoudre l'inéquation $\ln(3x-1)<0$, il faut avant tout trouver son domaine de définition.
$\ln(3x-1)$ est défini pour tout réel x tel que $3x-1>0$, soit $x>\dfrac{1}{3}$.
Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

— $\ln(3x-1)<0 \iff e^{\ln(3x-1)}<e^0$
$$\iff 3x-1<1$$
$$\iff 3x<2$$
$$\iff x<\frac{2}{3}$$

— On trouve l'intersection de l'intervalle $]-\infty;\dfrac{2}{3}[$ et du domaine de définition $]\dfrac{1}{3};+\infty[$. Par conséquent, $S=\left]\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right[$.

4. $e^{5-x}\leqslant 2 \iff \ln\left(e^{5-x}\right)\leqslant\ln(2)$
$$\iff 5-x\leqslant\ln(2)$$
$$\iff -x\leqslant\ln(2)-5$$
$$\iff x\geqslant 5-\ln(2)$$
Par conséquent, $S=]5-\ln(2);+\infty[$.

Exercice n°4

Résolutions d'inéquations.

1. $\ln(5x+20)>\ln(3x-9)$.
— **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases}5x+20>0\\3x-9>0\end{cases}$, soit $x>3$.
Le domaine de définition est donc $\mathcal{D}=]3;+\infty[$.
— **Résolution :** $\ln(5x+20)>\ln(3x-9)$
$$\iff 5x+20>3x-9$$
$$\iff 2x>-29$$
$$\iff x>-\frac{29}{2}.$$
Notons $\mathcal{U}=\left]-\dfrac{29}{2};+\infty\right[$; alors, l'ensemble solution de l'inéquation est $\mathcal{U}\cap\mathcal{D}$, soit $\mathcal{S}=]3;+\infty[$.
— **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases}8-2x>0\\5x-25>0\end{cases}$, soit $\begin{cases}x<4\\x>5\end{cases}$, donc le domaine de définition est vide.
Ainsi, $\mathcal{S}=\emptyset$.

2. $\ln(x^2+1)<\ln(2x^2+x+2)$.
— **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases}x^2+1>0\\2x^2+x+2>0\end{cases}$, ce qui est toujours le cas car le discriminant des polynômes x^2+1 et $2x^2+x+2$ sont strictement négatifs.
Le domaine de définition est donc $\mathbb{R}$.
— **Résolution :** $\ln(x^2+1)<\ln(2x^2+x+2)$
$$\iff x^2+1<2x^2+x+2$$
$$\iff x^2+x+1>0.$$
Le discriminant de x^2+x+1 étant strictement négatif, tout réel x convient.
L'ensemble solution de cette inéquation est donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

3. $\ln(2x^2-3x+1)>\ln(-5x^2+8x-3)$.
— **Domaine de définition :** les racines de $2x^2-3x+1$ sont 1 et $\dfrac{1}{2}$;
ainsi, $2x^2-3x+1>0$ sur $I=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$.
Les racines de $-5x^2+8x-3$ sont 1 et $\dfrac{3}{5}$ donc $-5x^2+8x-3>0$ sur $J=\left]\dfrac{3}{5};1\right[$.
Le domaine de définition est donc $I\cap J=\varnothing$.
— **Résolution :** le domaine de définition étant l'ensemble vide, il ne peut y avoir de solutions à cette inéquation. Donc $\mathcal{S}=\varnothing$.

4. $\ln(x^2-5x-14)\geqslant\ln(2x^2-10x+8)$.
— **Domaine de définition :** le polynôme $x^2-5x-14$ admet pour racines -2 et 7 donc il est strictement positif sur $I=]-\infty;-2[\cup]7;+\infty[$.
Le polynôme $2x^2-10x+8$ admet pour racines 4 et 1 donc il est strictement positif sur $J=]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$.

Le domaine de définition est donc $I\cap J$, soit $\mathcal{D}=]-\infty;-2[\cup]7;+\infty[$.
— **Résolution :** $\ln(x^2-5x-14)\geqslant\ln(2x^2-10x+8)$
$$\iff x^2-5x-14\geqslant 2x^2-10x+8$$
$$\iff x^2-5x+22\leqslant 0.$$
Le discriminant de $x^2-5x+22$ est $\Delta=25-108<0$ donc le polynôme est toujours strictement positif.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\mathcal{S}=]-\infty;-2[\cup]7;+\infty[$.

5. $\ln(x^2+x-6)>\ln(-2x^2+14x+16)$.
— **Domaine de définition :** le polynôme x^2+x-6 admet pour racines 2 et -3 donc il est strictement positif sur $I=]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$.
Le polynôme $-2x^2+14x+16$ admet pour racines -1 et 8 donc il est strictement positif sur $J=]-1;8[$.

Le domaine de définition est donc $I \cap J$, soit $\mathcal{D} =]2; 8[$.

— **Résolution :** $\ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16)$

$$\iff x^2 + x - 6 > -2x^2 + 14 + 16$$
$$\iff 3x^2 - 13x - 22 > 0.$$

Le discriminant du polynôme $3x^2 - 13x - 22$ est $\Delta = 169 + 12 \times 22 = 433$ donc il admet deux racines : $x_1 = \dfrac{13 - \sqrt{433}}{6} \notin \mathcal{D}$ et $x_2 = \dfrac{13 + \sqrt{433}}{6} \in \mathcal{D}$.
Ainsi, $3x^2 - 13x - 22 > 0$ sur $\mathcal{U} =]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\mathcal{U} \cap \mathcal{D}$, soit $\mathcal{S} = \left]\dfrac{13 + \sqrt{433}}{6}; 8\right[$.

Exercice n°5

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln x - x.$$

1. $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.
   Or, pour $x \geqslant 1$, $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$, et donc $f'(x) \leqslant 0$.
   La fonction f est donc décroissante sur $[1; +\infty[$.
2. $f(1) = -1$, donc $f(x) < 0$ sur $[1; +\infty[$. Donc $\ln x < x$ sur cet intervalle.
   De plus, on sait que pour $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$.
   On en déduit alors que sur $[1; +\infty[$, $0 \leqslant \ln x < x$.
3. Posons $x = \sqrt{u}$, $u \geqslant 1$.
   Alors, de ce qui précède, on déduit que
   $$0 \leqslant \ln \sqrt{u} < \sqrt{u}.$$
   Ainsi, en divisant par u, on obtient :
   $$0 \leqslant \frac{\ln \sqrt{u}}{u} < \frac{\sqrt{u}}{u},$$
   on encore :
   $$0 \leqslant \frac{\frac{1}{2}\ln u}{u} < \frac{1}{\sqrt{u}}.$$
   Que l'on mette u ou x importe peu. Ainsi,
   $$\forall x \in [0; +\infty[,\ 0 \leqslant \frac{\ln x}{2x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{2x} = 0$.
   Multiplier l'expression par $\dfrac{1}{2}$ ne change pas la limite, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2} \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Nous savons que $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(X + 1)}{X} = 1$. Ainsi, en posant $X = x^2$, on a :
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x^2} = 1.$$
   De plus, $\lim\limits_{x \to 0} (x - 1) = -1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \left((x - 1)\dfrac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x^2}\right) = -1$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$.
2. Nous pouvons écrire, sur $\mathbb{R}^*$:
   $$f(x) = \frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x} - \frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x^2 + 1} \times \frac{x^2 + 1}{x^2}$$
   — $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$, donc en posant $X = x^2 + 1$, on obtient :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x^2 + 1} = 0.$$
   De plus,
   $$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$
   Ainsi,
   $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x^2 + 1} \times \frac{x^2 + 1}{x^2}\right) = 0. \qquad (1)$$
   — Par ailleurs,
   $$\begin{aligned}\ln\left(x^2 + 1\right) &= \ln\left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &= 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$
   Ainsi, $\dfrac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

   Posons $g(x) = \ln(1 + x) - x$, pur $x \geqslant 0$.
   Alors, $g'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - 1 < 0$ pour $x \geqslant 0$ donc g est décroissante sur $[0; +\infty[$.
   De plus, $g(0) = 0$ donc cela signifie que $g(x) \leqslant 0$ sur $[0; +\infty[$.
   Ainsi, pour $x \geqslant 0$, $\ln(1 + x) \leqslant x$ et donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, soit $\dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{x^3}$.
   $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $1 + \dfrac{1}{x^2} > 1$, d'où $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) > 0$ et finalement $\dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) > 0$.
   Ainsi, $0 < \dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{x^3}$.
   On en déduit alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\right] = 0$ (théorème des gendarmes).
   De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x} = 0. \qquad (2)$$
   — Finalement, des égalités (1) et (2), on en déduit :
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

3. D'après la question précédente,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}=0.$$

De plus, en écrivant pour $x<0$:

$$\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=2\frac{\ln|x|}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right),$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln|x|}{x}=0$.

De plus, on a toujours $0<\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{x^2}$ et donc $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)<0$ pour $x<0$.

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ (théorème des gendarmes).

Finalement,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=0.$$

Alors,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

Exercice n°7

Calcul de limites.

1. Nous savons que $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$.

   Posons $X=\sqrt{x^2-1}$. Alors, $\lim\limits_{x\to-\infty}X=+\infty$.

   De plus, $\dfrac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}=\dfrac{\ln X}{X^2}=\dfrac{\ln X}{X}\times\dfrac{1}{X}$.

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{\ln X}{X}\times\dfrac{1}{X}\right)$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\right)=0.$$

2. $\dfrac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{\ln\left[(x-1)^2+1\right]}{(x-1)^2}=\dfrac{\ln(X+1)}{X}$, avec $X=(x-1)^2$.

   $\lim\limits_{x\to1}X=0$ donc $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}\right)=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$.

   Ainsi,

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}\right)=1.$$

3. Posons $f(X)=\ln\left(1-X^2\right)$ et $g(x)=\ln(1+X)$, avec $X=\dfrac{1}{x}$.

   Alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}X=0$, et $f(0)=g(0)=\ln 1=0$.

$$\begin{aligned}\frac{f(X)}{g(X)}&=\frac{f(X)-f(0)}{g(X)-g(0)}\\&=\frac{f(X)-f(0)}{X-0}\times\frac{X-0}{g(X)-g(0)}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to0}\frac{f(X)}{g(X)}=\lim_{X\to0}\left[\frac{f(X)-f(0)}{X-0}\times\frac{X-0}{g(X)-g(0)}\right]$$

Or, $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{f(X)-f(0)}{X-0}=f'(0)$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{X-0}{g(X)-g(0)}=\dfrac{1}{g'(0)}$.

$f'(X)=\dfrac{-2X}{1-X^2}$ et $g'(X)=\dfrac{1}{1+X}$.

Ainsi,

$$\lim_{X\to0}\frac{f(X)}{g(X)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{0}{1}=0$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\right)=0.}$$

4. On peut écrire :

$$\begin{aligned}&\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x+1}}\\&=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}}\times\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\\&=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-(x+1)}\\&=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-x}\\&=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\times\frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-\sqrt{x}\times\cancel{\sqrt{x}}}\\&=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\times\left(-\frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$

$$\left.\begin{array}{l}\blacktriangleright\ \lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0^+\\ \blacktriangleright\ \lim\limits_{X\to0^+}\left(-\dfrac{1}{X}\right)=-\infty\\ \blacktriangleright\ \lim\limits_{x\to0}\left(1+\sqrt{x+1}\right)=2\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{-\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}}=-\infty$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x+1}}\right)=-\infty.$$

Exercice n°8

Calcul de dérivées.

1. $f_1(x)=x\ln x-x$.

   La fonction $x\mapsto x\ln x$ est de la forme uv avec :

$$\begin{array}{lcl}u(x)=x&;&u'(x)=1\\v(x)=\ln x&;&v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{array}$$

   donc sa dérivée est :

$$(u'v+uv')(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

   Ainsi,

$$f_1'(x)=\ln x+1-1\qquad\text{soit}\qquad f_1'(x)=\ln x.$$

2. $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ donc f_2 est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \ln x & ; & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x & ; & v'(x) = 1. \end{array}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} \\ f_2'(x) &= \frac{1 - \ln x}{x^2}. \end{aligned}$$

3. $f_3(x) = \ln\left(x^2\right)$ donc f_3 est de la forme $\ln u$, avec

$$u(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad u'(x) = 2x.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{u'}{u}(x) \\ &= \frac{2x}{x^2} \\ f_3'(x) &= \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

4. $f_4(x) = \ln\sqrt{x+1}$ donc f_4 est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = \sqrt{x+1}$.
u est de la forme $\sqrt{g}$, avec $g(x) = x+1$ donc
$u'(x) = \dfrac{g'}{2\sqrt{g}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.
Dès lors,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{u'}{u}(x) \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \\ f_4'(x) &= \frac{1}{2(x+1)}. \end{aligned}$$

5. $f_5(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$ donc f_5 est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = \ln\left(x^2+1\right) \qquad \text{et} \qquad v(x) = x^2+1.$$

u est de la forme $\ln g$, avec $g(x) = x^2+1$ donc :

$$u'(x) = \frac{u'}{u}(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{2x}{x^2+1} \times (x^2+1) - 2x \times \ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{2x - 2x\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ f_5'(x) &= \frac{2x\left[1 - \ln(x^2+1)\right]}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

6. $f_6(x) = \ln\left(\ln x\right)$ donc f_6 est de la forme $\ln u$ avec :

$$u(x) = \ln x \qquad \text{et} \qquad u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \frac{u'}{u}(x) \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \\ f_6'(x) &= \frac{1}{x\ln x}. \end{aligned}$$

Exercice n°9

L'étudier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}.$$

— $f(-x) = f(x)$ et le domaine de définition de f est centré en 0.
La fonction f est donc paire. On peut donc l'étudier sur $[0; +\infty[$.

— $\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

De plus, $f(0) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0$.

— D'après l'exercice précédent,
$f'(x) = \dfrac{2x\left[1 - \ln\left(x^2+1\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^2}$.
Sur $[0; +\infty[$, $2x > 0$ donc
$f'(x)$ est du signe de $1 - \ln\left(x^2+1\right)$.

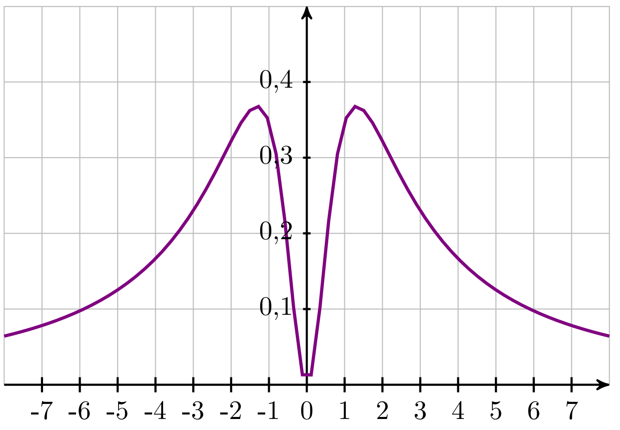
$$\begin{aligned} 1 - \ln\left(x^2+1\right) > 0 &\iff \ln\left(x^2+1\right) < 1 \\ &\iff x^2+1 < e^1 \\ &\iff x^2 < e-1 \\ &\iff 0 < x < \sqrt{e-1}. \end{aligned}$$

On obtient alors le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\sqrt{e-1}$		0		$\sqrt{e-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0	↗	e^{-1}	↘	0

Par ailleurs, $\begin{aligned}[t] f\left(\sqrt{e-1}\right) &= \frac{\ln(e-1+1)}{e-1+1} \\ &= \frac{1}{e} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$

Ci-après la courbe représentative de la fonction f.



Exercice n°10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Il faut que $1 + \dfrac{1}{x} > 0$, ou encore $\dfrac{x+1}{x} > 0$. En étudiant le signe de ce quotient, on obtient :
$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$$

2. $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.
On sait que sur $\mathcal{D}_f$, $1 + \dfrac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) < 0$.
Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.
De même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. De plus, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{1}{x} = -1$ et
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 0^+$.
Ainsi, par composition, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$.
Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.

On déduit alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

Exercice n°11

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)\ln\left(x^2 - 2x + 1\right).$$

1. f est définie pour tout x tel que $x^2 - 2x + 1 > 0$, autrement dit, lorsque $(x-1)^2 > 0$.
Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. — On a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$
et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2-2x+1) = \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
— Par un raisonnement analogue, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
— $f(x) = (x-1)\ln\left[(x-1)^2\right]$.
   — Si $x > 1$, $f(x) = 2(x-1)\ln(x-1)$.
   En posant $X = x - 1$, on a $f(X) = 2X\ln X$ avec $X \to 0$ quand $x \to 1$.
   Or, $\displaystyle\lim_{X\to0} X\ln X = 0$. Donc, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 0$.
   — Si $x < 1$, $f(x) = -2(1-x)\ln(1-x)$. Par un raisonnement analogue à ce qui précède, en posant $X = 1 - x$, on obtient : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0$.

3. $$f'(x) = \ln\left(x^2-2x+1\right) + (x-1) \times \frac{2x-2}{x^2-2x+1}$$
$$= \ln\left[(x-1)^2\right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2}$$
$f'(x) = \ln\left[(x-1)^2\right] + 2$.

4. $$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \ln\left[(x-1)^2\right] + 2 > 0 \\ &\iff \ln\left[(x-1)^2\right] > -2 \\ &\iff (x-1)^2 > e^{-2} \\ &\iff (x-1)^2 - \left(e^{-1}\right)^2 > 0 \\ &\iff \left(x-1-e^{-1}\right)\left(x-1+e^{-1}\right) > 0. \end{aligned}$$
On déduit alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$1-e^{-1}$		1		$1+e^{-1}$		$+\infty$
$x-1-e^{-1}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1+e^{-1}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Par ailleurs,
$$\begin{aligned} f\left(1-e^{-1}\right) &= \left(1-e^{-1}-1\right)\ln\left[\left(1-e^{-1}-1\right)^2\right] \\ &= -e^{-1}\ln\left(e^{-2}\right) \\ &= -e^{-1} \times (-2) \\ &= 2e^{-1}. \end{aligned}$$
De même, $f\left(1+e^{-1}\right) = -2e^{-1}$.
On en déduit alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$1-e^{-1}$		1		$1+e^{-1}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice n°12

Dans cet exercice, on acceptera la propriété suivante :

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b, \qquad a\ln b = \ln\left(b^a\right).$$

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = e\ln x - x.$$

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0} (e\ln x - x) = -\infty$.

2. On peut écrire :
$$f(x) = x\left(e\frac{\ln x}{x} - 1\right).$$

On sait que (croissance comparée) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$.
Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3. $f'(x) = \dfrac{e}{x} - 1 = \dfrac{e-x}{x}$. Ainsi, sur $]0; e[$, $f'(x) > 0$ et sur $]e; +\infty[$, $f'(x) < 0$.
On déduit alors le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$	

4. On remarque sur le tableau de variations que pour tout réel x strictement positif et différent de e, $f(x) < 0$. Ainsi,
$$f(\pi) < 0,$$
autrement dit,
$$e \ln \pi < \pi$$
soit,
$$\ln \pi^e < \pi.$$
En composant par la fonction exponentielle, qui est strictement croissante, on obtient :
$$e^{\ln \pi^e} < e^{\pi},$$
soit,
$$\pi^e < e^{\pi}.$$

Exercice n°13

Lorsque l'on prend des antibiotiques, la concentration de bactéries présentes dans le corps d'une personne malade diminue avec le temps en suivant le modèle d'une fonction f définie, pour $0 \leqslant t \leqslant 6$, par :

$$f(t) = ae^{kt} + b \quad , \quad a, b, k \text{ étant trois réels, avec } a \neq 0,$$

où t désigne le temps (exprimé en jour) et où $f(t)$ représente le taux de bactéries restantes.
Ainsi, $f(0) = 1$. On suppose que la totalité des bactéries sont éliminées après 6 jours. Donc $f(6) = 0$.

1. — On sait que $f(0) = 1$ donc $ae^{k\times 0} + b = 1$, soit $a + b = 1$, ou encore $b = 1 - a$.
   — De plus, $f(6) = 0$ donc $ae^{6k} + b = 0$, soit $ae^{6k} = -b = a - 1$. Ainsi, $e^{6k} = 1 - \dfrac{1}{a}$ et donc $6k = \ln\left(1 - \dfrac{1}{a}\right)$.
   Finalement, $k = \dfrac{1}{6} \ln\left(1 - \dfrac{1}{a}\right)$.

   On obtient alors :
$$\boxed{f(t) = ae^{\frac{1}{6}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)t} + 1 - a}$$

2. 50% des bactéries disparaissent au bout de deux jours, donc $f(2) = \dfrac{1}{2}$, soit :
$$ae^{\frac{1}{6}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)\times 2} + 1 - a = \frac{1}{2}.$$
Ainsi,
$$e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)} + \frac{1}{2} - a = 0.$$

3. Si on pose $h(x) = xe^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$, alors h est de la forme uv avec :
$$u(x) = x \qquad \text{et} \qquad v(x) = e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$
avec $u'(x) = 1$ et
$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{1}{3x^2} \times \frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{1}{3x} \times \frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}. \end{aligned}$$
Dès lors,
$$\begin{aligned} h'(x) &= (u'v + uv')(x) \\ &= 1 \times e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} + x \times \frac{1}{3x} \times \frac{1}{x-1} \times e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \left(1 + \frac{1}{3x-3}\right). \end{aligned}$$
En conséquence, $g'(x) = h'(x) - 1$ soit
$g'(x) = e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \left(1 + \dfrac{1}{3x-3}\right) - 1$.

4. (a) — $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x-3}\right) = 1$;
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0$. Ainsi, par composition, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 0$.
   De plus, $\lim\limits_{Y\to 0} e^Y = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 1$.

   En conséquence, par produit,
   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \left(1 + \dfrac{1}{3x-3}\right) = 1$.
   Finalement,
$$\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0.$$
   (b) Si $x > 1$, alors $9x(x-1) > 0$ et donc $\dfrac{-2}{9x(x-1)} < 0$.
   De plus, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $g''(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.
   Par conséquent, g' est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ et donc, d'après la question précédente, $g'(x) > 0$ sur cet intervalle.
   On en déduit que g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

5. $g(1{,}3) \approx -0{,}002\,612\,69 < 0$ et $g(1{,}4) \approx 0{,}022\,087\,258 > 0$ donc 0 est une valeur intermédiaire de $g(1{,}3)$ et $g(1{,}4)$.
De plus, g est continue et strictement monotone sur $[1{,}3; 1{,}4]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou le théorème de bijection), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1{,}3; 1{,}4]$.

Exercice n°14

Soit f la fonction définie pour tout réel $x > -1$ par :
$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 6x - 1.$$

1. — Calcul de $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

On sait que $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0$. Donc, en posant $X = x+1$, on obtient $\lim\limits_{x\to -1} (x+1)\ln(x+1) = 0$ (autrement dit par composition).

De plus, $\lim\limits_{x\to -1} (-6x-1) = 5$.

En conséquence, par somme, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 5$.

— Calcul de $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

On commence par factoriser $f(x)$ par x :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\frac{x+1}{x}\ln(x+1) - 6 - \frac{1}{x}\right) \\ &= x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1) - 6 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ donc, par produit,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1) = +\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-6-\frac{1}{x}\right) = -6$.

Par ailleurs, par somme,

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1) - 6 - \frac{1}{x}\right] = +\infty$.

On en déduit alors, par produit, que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Calculons $f'(x)$.

— On commence par dériver $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$, qui est de la forme $u\times v$, où :

$$\begin{aligned} u(x) &= x+1 & v(x) &= \ln(x+1) \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (u'v+v'u)(x) \\ &= 1\times\ln(x+1) + (x+1)\times\frac{1}{x+1} \\ &= \ln(x+1)+1. \end{aligned}$$

— On en déduit la dérivée de $f(x)$ par somme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) + (-6x-1)' \\ &= \ln(x+1)+1-6 \\ f'(x) &= \ln(x+1)-5. \end{aligned}$$

3. — Déterminons le signe de $f'(x)$. Pour cela, résolvons par exemple l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \ln(x+1)-5 \\ &\iff \ln(x+1) > 5 \\ &\iff e^{\ln(x+1)} > e^5 \\ &\iff x+1 > e^5 \\ &\iff x > e^5-1. \end{aligned}$$

— On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations de f.

x	-1		e^5-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	5	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4. — Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{1}{2};0\right]$. Sur cet intervalle,

— f est continue et strictement décroissante ;

— de plus, $f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 1{,}65$ et $f(0) = -1$ donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f(0)$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{1}{2};0\right]$. Notons-la α.

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0{,}196$.

— Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[395;400]$. Sur cet intervalle,

— f est continue et strictement croissante ;

— de plus, $f(395) \approx -2{,}36$ et $f(400) = 2{,}58$ donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f(395)$ et $f(400)$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[395;400]$. Notons-la β.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\beta \approx 397{,}397$.

Exercice n°15

A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{x^2-x+1}{2x^2}.$$

Partie A :

1. h est une somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc elle est aussi dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{(2x-1)(2x^2)-4x(x^2-x+1)}{4x^4} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{4x^3-2x^2-4x^3+4x^2-4x}{4x^4} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2x^2-4x}{4x^4} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{x-2}{2x^3} \\ h'(x) &= \frac{2x^2+x-2}{2x^3}. \end{aligned}$$

2. Le discriminant du polynôme $P(x) = 2x^2+x-2$ est :

$$\Delta = 1 - 4\times 2\times(-2) = 17.$$

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

$P(x)$ est du signe opposé de « 2 » entre les deux racines. Or, $x_1 < 0$. Donc, $h'(x) < 0$ sur $]0; x_2[$ et $h'(x) > 0$ sur $]x_2; +\infty[$.

3. On a le tableau suivant :

x	0		x_2		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
h	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} h(x_2) &= \ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right) + 1}{2\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)^2} \\ &\approx 0{,}43 > 0. \end{aligned}$$

En conséquence, $h(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B :

1. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme d'une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ ($x \mapsto -x$) et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ ($x \mapsto x^2+1$ et $x \mapsto \ln x$). Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\ln x + \left(x^2+1\right) \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= 2x\ln x + \frac{x^2+1}{x} - 1 \\ &= 2x\ln x + \frac{x^2-x+1}{x} \\ f'(x) &= 2x\left(\ln x + \frac{x^2-x+1}{2x^2}\right). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ f'(x) > 0 &\iff 2x\left(\ln x + \frac{x^2-x+1}{2x^2}\right) > 0 \\ &\iff 2xh(x) > 0 \\ &\iff h(x) > 0. \end{aligned}$$

2. Dans la partie précédente, nous avons vu que sur $]0; +\infty[$, $h(x) > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3. (a) $f(x) = x \times x\ln x + \ln x - x$.
Or, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

(b) $f(x) = x\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x - 1\right]$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x - 1\right] = +\infty$.
En conséquence, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Des questions précédentes, on déduit le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) f est dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $]0; +\infty[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

(b) $f(1) = 2\ln 1 - 1 = -1 < 0$ et $f(2) = 5\ln 2 - 2 > 0$ donc $1 < \alpha < 2$.

(c) En utilisant la calculatrice, on obtient : $\alpha \approx 1{,}6$.