Série d'exercices

Corrigés Classe : Tle Spé Maths Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Donner la bonne réponse parmi les propositions suivantes.

1. L'espérance mathématique de la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}2$ est :

   (a) 0,02 (c) 2
   (b) 0,2 (d) 20

2. La variance de la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}15$ est :

   (a) 3 (c) 17
   (b) 2,55 (d) 0,1275

3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(15; 0{,}1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(20; 0{,}3)$ deux variables aléatoires. Que vaut $E(X+Y) = ?$

   (a) 7,5 (c) 0,4
   (b) 35 (d) 3,5

4. Soit X une variable aléatoire de variance 5. Si on multiplie par 2 toutes les valeurs prises par X alors la variance devient :

   (a) 10 (c) 20
   (b) 15 (d) 25

Exercice n°2

Ewenn, le responsable de fabrication de l'usine ELECTOP est chargé de contrôler une chaîne de production fabriquant un composant électronique. Sur 10 000 composants pris au hasard, il constate que 7 sont défectueux. Il suppose donc que la probabilité d'avoir un composant défectueux fabriqué par cette chaîne de production est égale à 0,000 7.
Le mois suivant, il choisit au hasard sur cette chaîne de production 20 composants sur 10 000 composants. Ce dernier nombre étant très grand par rapport à 20, on peut assimiler cette expérience à un tirage avec remise de 20 composants sur 10 000.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de composants défectueux.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X \geqslant 2)$.

Exercice n°3

Une urne contient 3 boules bleues et 7 boules vertes. On tire successivement au hasard et de façon indépendante 5 boules de cette urne en les remettant dans l'urne après avoir regardé leur couleur. On note X le variable aléatoire représentant le nombre de boules bleues tirées. à la fin de cette expérience.

1. Décrire X (donner la valeurs possibles de X).
2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
3. Calculer alors :

   (a) $P(X = 0)$. (b) $P(X = 3)$. (c) $P(X \geqslant 1)$.

Exercice n°4

Maria et Esther-Anne pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité que Maria gagne une rencontre est 0,6. Elles décident de jouer trois matches dans l'année (les résultats des matches sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, la perdante versera 20 €.
Esther-Anne s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matches gagnés par Esther-Anne et D la variable aléatoire correspondant à la dépense d'Esther-Anne.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Exprimer D en fonction de X et en déduire les valeurs possibles de D.
2. Démontrer que la probabilité que Esther-Anne dépense 40 € est 0,432.
3. Calculer l'espérance de dépense en fin d'année d'Esther-Anne.

Exercice n°5

Tigane se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h. Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\dfrac{2}{3}$.
Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par Tigane sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps (en minute) mis par Tigane pour aller au lycée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Exprimer T en fonction de X.
3. Déterminer l'espérance mathématique $E(T)$ de T et interpréter ce résultat.
4. Tigane part 17 minutes avant le début des cours. Calculer la probabilité que l'élève soit en retard au lycée.

Exercice n°6

Gwenael un joueur de basket-ball effectue une succession de n tirs en direction du panier. Les statistiques de ce joueur nous informent que :

— le 1[er]lancer est réussi avec une probabilité de 0,95 ;

— si un tir est réussi, le tir suivant est réussi avec une probabilité de 0,85 ;
— si un tir a échoué, le tir suivant est réussi avec une probabilité de 0,75.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le n-ième tir est réussi » et p_n la probabilité que le n-ième tir soit réussi. On a donc $p_1 = 0{,}95$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pour $n = 2$, et vérifier que $p_2 = 0{,}845$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}1p_n + 0{,}75$.
3. On pose $u_n = p_n - \dfrac{5}{6}$.

   Montrer que (u_n) est géométrique et en déduire une expression de u_n, puis de p_n, en fonction de n.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice n°7

Chaque année, l'association des gens polis de Paris organise un congrès et comme chaque année, tous les participants doivent se serrer la main.
Cette année, il y a 50 participants.
Combien de poignées de mains vont être données ?

Exercice n°8

Lors d'un jeu radiodiffusé, on estime que le candidat, quelle que soit la question posée, a deux chances sur trois de donner la bonne réponse. Il gagne 50 euros par réponse exacte.
L'animateur du jeu lui pose successivement cinq questions.

1. Calculer la probabilité que le candidat ait cinq bonnes réponses.
2. Quelle est la probabilité que le candidat gagne 250 euros ?
3. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses exactes au bout des cinq questions. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier la réponse.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y qui compte le gain total du joueur.
5. Calculer l'espérance de gain du joueur.

Exercice n°9

Dans un hôpital, lors d'une pandémie d'une maladie appelée « STAS-3 », 63% des patients qui arrivent aux urgences présentent les symptômes de cette maladie, dont 78% sont réellement atteints par la STAS-3.
Parmi les autres patients, 7% s'avèrent atteints de cette maladie.

On choisit au hasard parmi tous les patients du service des urgences une personne.
On note :
— S l'événement : « la personne choisie présente des symptômes de la STAS-3 »,
— M l'événement : « la personne est réellement atteinte de la STAS-3 ».

1. Construire un arbre de probabilités représentant cette situation.
2. Quelle est la probabilité que la personne choisie présente des symptômes de la STAS-3 et soit réellement atteinte de cette maladie ?
3. Montrer que la probabilité que la personne choisie soit réellement atteinte de la STAS-3 est égale à 0,5173.
4. La personne choisie n'est pas atteinte de la STAS-3.Quelle est la probabilité qu'elle ait présenté des symptômes lors de son arrivée aux urgences.

   L'hôpital reçoit 100 € de prime pour chaque patient atteint de la STAS-3 en plus de 100 000 € de forfait pour faire face à cette pandémie. On choisit au hasard 20 personnes aux urgences. Il y a tellement de personnes que l'on peut assimiler ceci à un tirage aléatoire avec remise.
   On note :
   — X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes réellement atteintes par la STAS-3,
   — G la variable aléatoire qui représente la prime gagnée par l'hôpital.
5. Quelle est la loi de probabilité de X ?
6. Exprimer G en fonction de X. Calculer alors la prime moyenne que pourrait recevoir l'hôpital sur ces 20 patients.
7. Calculer $P(X = 5)$, $P(X \leqslant 5)$ et $P(X \geqslant 10)$. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.
8. Déterminer le premier entier k pour lequel $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$.

Exercice n°10

Un joueur lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Chaque fois que le joueur obtient Face, il gagne 2 points, sinon il perd 1 point.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.

Exercice n°11

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les chiffres 1, 2, 3 et 4. On lit le résultat d'un lancer sur la face cachée du dé.
On note p_i la probabilité d'obtenir le chiffre i suite à un lancer de ce dé.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que ces probabilités sont :

$$p_1 = 0{,}1 \ ; p_2 = 0{,}2 \ ; p_3 = 0{,}3 \ ; p_4 = 0{,}4 \ .$$

On lance deux fois successivement ce dé. On suppose que les lancers sont indépendants entre eux.

1. Dresser un arbre pondéré décrivant l'expérience.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir les chiffres 1 et 3 dans cet ordre ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir deux chiffres distincts rangés par ordre croissant ?
4. On instaure la règle suivante : si un joueur lançant deux fois successivement ce dé obtient deux chiffres distincts rangés par ordre croissant il gagne 2 euros, si il obtient

deux fois le chiffre 1 il gagne 5 euros, tandis que, dans tous les autres cas, il perd 3 euros.
On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Déterminer l'espérance et l'écart type de X.
Ce jeu est-il équitable ?

(c) On modifie la valeur des gains de la manière suivante : si on obtient deux chiffres distincts rangés par ordre croissant on gagne 5 euros, si on obtient deux fois le chiffre 1 on gagne 11 euros, et sinon, dans tous les autres cas, on perd 5 euros.
On note Y la variable aléatoire égale au gain du joueur avec cette nouvelle règle.
Déterminer l'espérance et l'écart type de Y.

Exercice n°12

Une urne contient 3 boules bleues et 7 boules vertes. On tire successivement au hasard et de façon indépendante 5 boules de cette urne en les remettant dans l'urne après avoir regardé leur couleur.
On note X le variable aléatoire représentant le nombre de boules bleues tirées à la fin de cette expérience.

1. Décrire X (donner la valeurs possibles de X).
2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
3. Calculer alors :

(a) $P(X=0)$. (b) $P(X=3)$. (c) $P(X \geqslant 1)$.

Exercice n°13

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.
Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps (en minute) mis par l'élève pour aller au lycée.

1. Déterminer la loi de probabilités de X.
2. Exprimer T en fonction de X.
3. Déterminer l'espérance mathématique $E(T)$ de T et interpréter ce résultat.
4. L'élève part 17 minutes avant le début des cours. Calculer la probabilité que l'élève soit en retard au lycée.

Exercice n°14

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité qu'Alain gagne une rencontre est 0,6. Ils décident de jouer trois matches dans l'année (les résultats des matches sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 €.
Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matches gagnés par Benjamin et D la variable aléatoire correspondant à la dépense de Benjamin.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Exprimer 0 en fonction de D et en déduire les valeurs possibles de D.
2. Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40 € est 0,432.
3. Calculer l'espérance de dépense en fin d'année de Benjamin.

Exercice n°15

Un jeu télévisé se déroule en deux manches :

— *Première manche.*
Une personne tire au hasard et simultanément deux boules d'une urne contenant 20 boules numérotées de 1 à 20. Si une boule portant un numéro multiple de 5 est choisie, 20 points sont gagnés ; dans le cas contraire, aucun point n'est gagné.

— *Seconde manche.*
La personne doit ouvrir une porte parmi trois portes fermées. Seule l'une d'elles peut multiplier par 2 les gains gagnés lors de la première manche. L'une des deux autres permet d'ajouter 5 points ; quant à l'autre, elle retire 5 points si les gains de la première manche sont supérieurs ou égaux à 5. Sinon, rien n'est retiré.

À l'issue de ces deux manches, chaque point vaut 100 €.

On appelle G le gain de la personne participant au jeu.

1. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de points à l'issue de la première manche.
Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer $E(X)$.
2. On note Y la variable aléatoire représentant le gain algébrique des points à l'issue de la seconde manche.
Déterminer la loi de probabilité de Y ainsi que $E(Y)$.
3. Calculer $E(G)$.
4. À l'issue de ces deux manches, la personne doit participer à la manche finale qui consiste à répondre à cinq questions de culture générale. À chaque mauvaise réponse, il ou elle perd 200 €sur les gains obtenus précédemment.
On note Z la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses d'une personne lors de cette manche finale.
La société productrice du jeu estime que Z suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}2$.
Déterminer le gain que peut espérer avoir la personne à l'issue de cette finale.