Exercice n°1

D'après la propriété sur la somme des variables aléatoires indépendantes,

$$E(S_5)=\sum_{k=1}^{5}E(X_k).$$

Or, pour tout entier k compris entre 1 et 5,

$$E(X_k)=1\,000\times 0{,}75=750.$$

Par conséquent, $E(S_5)=5\times 750=3\,750$.

Exercice n°2

1. Notons $x=P(X=0)$. La loi de probabilité de X est :

$X=k$	0	2	5	7
$P(X=k)$	x	$\frac{3}{5}x$	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{5}x$

La somme des probabilités est égale à 1 donc :

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}x=1 \iff \frac{23}{10}x=1 \iff x=\frac{10}{23}.$$

D'où :

$X=k$	0	2	5	7
$P(X=k)$	$\frac{10}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{2}{23}$

2. $E(X)=2\times\frac{6}{23}+5\times\frac{5}{23}+7\times\frac{2}{23}=\frac{51}{23}$.
3. Notons X_k la variable aléatoire représentant le nombre de minutes de retard du train d'Hubert le jour k, $1\leqslant k\leqslant 20$.

Posons alors : $M_{20}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_{20}}{20}$. Alors,

$$\begin{aligned}E(M_{20})&=\frac{E(X_1+X_2+\cdots+X_{20})}{20}\\&=\frac{E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{20})}{20}\\&=\frac{20\times\frac{51}{23}}{20}\\&=\frac{51}{23}\\&\approx 2{,}22.\end{aligned}$$

Ainsi, le retard moyen du train d'Hubert sur les 20 jours est d'environ 2 min 13 s.

Exercice n°3

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. *Faux.* Selon l'inégalité de Markov, $P(X\geqslant a)\leqslant\dfrac{E(X)}{a}$, ce qui donne dans notre cas :

$$P(X\geqslant 10)\leqslant\frac{9}{10}.$$

2. *Vrai.* En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P\big(|X-E(X)|\geqslant\delta\big)\leqslant\frac{V(X)}{\delta^2}$$

ce qui donne dans notre cas :

$$P\big(|X-7|\geqslant 18\big)\leqslant\frac{9}{18^2}$$

soit :

$$P\big(|X-7|\geqslant 18\big)\leqslant\frac{1}{36}<0{,}028.$$

3. *Faux.* Notons X_k le nombre de points lors du k-ième tirage. $X_k=0$ ou $X_k=1$. C'est une variable de Bernoulli. En répétant cette expérience (implicitement de manière indépendante), on constitue un schéma de Bernoulli dont la moyenne est :

$$\mu=np=1\,000\times\frac{4}{32}=125$$

et de variance $\sigma^2=np(1-p)=109{,}375=\dfrac{875}{8}$. D'après l'inégalité de concentration,

$$P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\right|\geqslant\delta\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\delta^2},$$

ce qui donne dans notre cas, en prenant $\delta=5$:

$$P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-125\right|\geqslant 5\right)\leqslant\frac{109{,}375}{1\,000\times 5^2}$$

soit :

$$P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-125\right|\geqslant 5\right)\leqslant 0{,}004375.$$

On ne peut donc pas assurer que la probabilité pour que la différence entre la moyenne des gains et 125 soit supérieure ou égale à 5 est toujours inférieure à 0,001.

Exercice n°4

On jette 3 600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. S suit une loi binomiale de paramètres 3 600 et $\frac{1}{6}$. On sait donc que :

$$E(S)=600 \qquad\text{et}\qquad V(S)=500.$$

De plus,

$$480 < S < 720 \iff -120 < S-600 < 120 \iff |S-600| < 120.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on obtient :

$$P(|S-600| \geqslant 120) \leqslant \frac{500}{120^2} \leqslant 0{,}035.$$

On en déduit que :

$$P(480 < S < 720) \geqslant 1 - 0{,}035$$

soit :

$$P(480 < S < 720) \geqslant 0{,}965.$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3 600 lancers est supérieure à 0,96.

Exercice n°5

On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces sortant de l'usine en l'espace d'une semaine.
   D'après l'inégalité de Markov,
   $$P(X > 75) \leqslant \frac{50}{75}$$
   soit :
   $$P(X > 75) \leqslant 0{,}67.$$
2. Commençons par écrire :
   $$P(40 < X < 60) = P(-10 < X-50 < 10) = P(|X-50| < 1$$
   L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev donne :
   $$P\big(|X-50| \geqslant 10\big) \leqslant \frac{25}{10^2}$$
   soit :
   $$P\big(|X-50| \geqslant 10\big) \leqslant 0{,}25.$$
   On en déduit alors que :
   $$1 - P\big(|X-50| < 10\big) \leqslant 0{,}25$$
   et donc :
   $$P\big(|X-50| < 10\big) \geqslant 0{,}75.$$
   La probabilité pour que la production de la semaine suivante soit comprise entre 40 et 60 est donc au moins de 75%.

Exercice n°6

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production de demain dépasse 75 pièces.

1. Notons X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces. En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient :
   $$P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{E(X)}{75}$$
   soit :
   $$P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{2}{3}.$$
2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :
   $$P(|X-50| \geqslant 25) \leqslant \frac{V(X)}{25^2}$$
   soit :
   $$P(|X-50| \geqslant 25) \leqslant \frac{5^2}{25^2}$$
   et donc :
   $$P(|X-50| \geqslant 25) \leqslant 0{,}04.$$

Exercice n°7

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X-10^2| \geqslant 10^3 - 10^2) \leqslant \frac{V(X)}{\left(10^3-10^2\right)^2}$$

pour trouver finalement :

$$P(|X-10^2| \geqslant 10^3 - 10^2) \leqslant 0{,}000\,123\,456\,790\,123.$$

Ainsi, $P(X \geqslant 10^3) \leqslant 0{,}000\,124$.

Exercice n°8

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur un échantillon très grand et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\dfrac{X_n}{n}$ approche p.

1. X_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Ainsi, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. On en déduit alors que :
   $$E(X_n) = np \qquad \text{et} \qquad V(X_n) = np(1-p).$$
2. D'après l'inégalité de concentration,
   $$\forall \delta > 0, \quad P\big(|X_n - np| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{np(1-p)}{\delta^2}.$$
   Or,
   $$|X_n - np| \geqslant \delta \iff \left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \frac{\delta}{n}$$
   En posant $\varepsilon = \dfrac{\delta}{n}$, on obtient alors :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2}$$
   que l'on peut aussi écrire, en simplifiant par n le dernier membre, sous la forme :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}p(1-p).$$
   De plus, la fonction $p \mapsto p(1-p)$ définie sur $[0;1]$ est une fonction de degré 2 admettant un maximum pour $p = \dfrac{1}{2}$ qui vaut $\dfrac{1}{4}$, donc :
   $$p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}.$$

L'inégalité devient alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. On cherche ici un entier n tel que :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geqslant 0{,}95$$

que l'on peut aussi écrire, en considérant l'événement contraire :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant 0{,}05.$$

D'après l'inégalité obtenue à la question précédente, il suffit donc de trouver un entier n tel que :

$$\frac{1}{4n\left(10 - -2\right)^2} \leqslant 0{,}05.$$

On trouve alors $n \geqslant 50\,000$.

Exercice n°9

On lance de manière indépendante n fois un dé équilibré à six faces.

Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de « 1 » obtenus.
X suit alors la loi $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{6}\right)$ et a donc une espérance égale à $\frac{n}{6}$ et une variance égale à $np(1-p) = \frac{5n}{36}$.
On nous demande ici de trouver un entier n tel que :

$$P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant 0{,}99.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\begin{aligned}
&\forall \delta > 0, \, P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{5n}{36\delta^2}\\
&\iff P\left[\left(X - \frac{n}{6} \leqslant -\delta\right) \cup \left(X - \frac{n}{6} \geqslant \delta\right)\right] \leqslant \frac{5n}{36\delta^2}\\
&\iff 1 - P\left(-\delta \leqslant X - \frac{n}{6} \leqslant \delta\right) \leqslant \frac{5n}{36\delta^2}
\end{aligned}$$

$$\forall \delta > 0, \quad \iff P\left(-\delta \leqslant X - \frac{n}{6} \leqslant \delta\right) \geqslant 1 - \frac{5n}{36\delta^2}.$$

On aimerait arriver à une inégalité avec $P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right)$; cela nous pousse à prendre $\delta = \frac{n}{6}$ pour obtenir :

$$P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant 1 - \frac{5}{n}.$$

Ainsi, il suffit de choisir un n tel que :

$$1 - \frac{5}{n} \geqslant 0{,}99 \iff n \geqslant 500.$$

Nous sommes donc assurés que pour $n \geqslant 500$, notre probabilité est supérieure à 0,99.

Exercice n°10

On souhaite démontrer l'inégalité de Markov stipulant que pour une variable aléatoire discrète d'espérance finie X à n valeurs positives,

$$\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

On note :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k).$$

1. On peut « couper » la somme désignant l'espérance de X en deux sommes : la première comportant toutes les valeurs de X inférieures strictement à a et la seconde comportant les valeurs de X supérieures ou égales à a, ce qui donne :

$$E(X) = \sum_{x_k \geqslant a} x_k P(X = x_k) \quad + \quad \sum_{x_k < a} x_k P(X = x_k).$$

2. On sait que $X \geqslant 0$ donc, pour tout entier k compris entre 1 et n, $x_k \geqslant 0$. De plus, une probabilité est toujours supérieure ou égale à 0.
Ainsi, pour tout entier $k \in [1; n]$, $x_k P(X = x_k) \geqslant 0$, ce qui implique que :

$$\sum_{x_k < a} x_k P(X = x_k) \geqslant 0.$$

3. De la question précédente, on déduit que :

$$E(X) \geqslant \sum_{x_k \geqslant a} x_k P(X = x_k).$$

Or, dans cette somme, $x_k \geqslant a$, ce qui implique :

$$E(X) \geqslant \sum_{x_k \geqslant a} a P(X = x_k)$$

soit :

$$E(X) \geqslant a \sum_{x_k \geqslant a} P(X = x_k).$$

De plus, par définition :

$$\sum_{x_k \geqslant a} P(X = x_k) = P(X \geqslant a)$$

ce qui implique alors :

$$E(X) \geqslant a P(X \geqslant a).$$

On en déduit alors, en divisant par $a \neq 0$:

$$\frac{E(X)}{a} \geqslant P(X \geqslant a).$$

Exercice n°11

On se propose dans cet exercice de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, stipulant que si X est une variable aléatoire discrète d'espérance μ et de variance $V(X)$ alors, quel que soit le réel $\delta > 0$,

$$P\big(|X - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Pour cela, on considère la variable $Y = \left[X - E(X)\right]^2$.

Par définition, Y est une variable aléatoire à valeurs positives et :

$$E(Y) = E\left[(X - E(X)^2\right] = V(X).$$

L'inégalité de Markov appliquée à Y donne alors :

$$\forall a > 0, \qquad P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{E(Y)}{a}$$

$$\iff \forall a > 0, \qquad P\left(\left(X - E(X)\right)^2 \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X)}{a}.$$

Posons alors $a = \delta^2$ avec $\delta > 0$. On obtient alors :

$$\forall \delta > 0, \qquad P\left(\left(X - E(X)\right)^2 \geqslant \delta^2\right) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Or,

$$\left(X - E(X)\right)^2 \geqslant \delta^2 \iff \left|X - E(X)\right| \geqslant \delta$$

car $\delta > 0$. Cela donne alors :

$$\forall \delta > 0, \qquad P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Exercice n°12

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $E(X) = \mu$ et une variance $V(X) = \sigma^2$. Soit $a > 0$.

1. On a :

$$X - \mu \geqslant a \iff X - \mu + \lambda \geqslant a + \lambda$$

donc la probabilité des deux événements $(X - \mu \geqslant a)$ et $(X - \mu + \lambda \geqslant a + \lambda)$ sont égales.

2. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E\left((X - \mu + \lambda)^2\right) &= E\left((X - \mu)^2 + 2(X - \mu)\lambda + \lambda^2\right) \\ &= \underbrace{E\left((X - \mu)^2\right)}_{=V(X)} + 2\lambda \underbrace{E(X - \mu)}_{=0} + \lambda^2 \\ &= \sigma^2 + \lambda^2. \end{aligned}$$

3. Dans un premier temps, on a :

$$P(X - \mu \geqslant a) = P(X - \mu + \lambda \geqslant a + \lambda).$$

Or,

$$P(X - \mu + \lambda \geqslant a + \lambda) \leqslant P\left((X - \mu + \lambda)^2 \geqslant (a + \lambda)^2\right).$$

Ainsi,

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant P\left((X - \mu + \lambda)^2 \geqslant (a + \lambda)^2\right).$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mu + \lambda)^2$, on obtient :

$$P\left((X - \mu + \lambda)^2 \geqslant (a + \lambda)^2\right) \leqslant \frac{E\left[(X - \mu + \lambda)^2\right]}{(a + \lambda)^2}.$$

Ainsi,

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \frac{E\left[(X - \mu + \lambda)^2\right]}{(a + \lambda)^2}$$

d'où :

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}.$$

4. Posons $f(\lambda) = \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}$, avec $\lambda \geqslant 0$.
Sa dérivée vaut :

$$f'(\lambda) = 2\frac{a\lambda - \sigma^2}{(a + \lambda)^3}.$$

On en déduit que $f'(\lambda) > 0 \iff \lambda > \dfrac{\sigma^2}{a}$.

Notamment, f admet un minimum en $\lambda = \dfrac{\sigma^2}{a}$, et ce minimum vaut $\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.
Ainsi,

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2} \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

On peut écrire :

$$\left(|X - \mu| \geqslant a\right) = \left(X - \mu \geqslant a\right) \cup \left(\mu - X \geqslant a\right).$$

Les deux événements $\left(X - \mu \geqslant a\right)$ et $\left(\mu - X \geqslant a\right)$ étant disjoints,

$$P\left(|X - \mu| \geqslant a\right) = P\left(X - \mu \geqslant a\right) + P\left(\mu - X \geqslant a\right).$$

À l'aide de la question précédente, appliquée à $X - \mu$ et à $\mu - X$, on obtient :

$$P\left(|X - \mu| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

soit :

$$P\left(|X - \mu| \geqslant a\right) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

5. Cette dernière inégalité est meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si :

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} < \frac{\sigma^2}{a^2} &\iff \frac{2}{\sigma^2 + a^2} < \frac{1}{a^2} \\ &\iff \frac{\sigma^2 + a^2}{2} > a^2 \\ &\iff \frac{\sigma^2 + a^2}{2} > \frac{2a^2}{2} \\ &\iff \sigma^2 > a^2 \\ &\iff a < \sigma \text{ car } a \text{ et } \sigma \text{ sont positifs.} \end{aligned}$$

Exercice n°13

On dispose d'une urne dans laquelle sont mises 7 boules rouges et 3 noires. On tire au hasard une boule de cette urne et on la remet dans l'urne ; si la boule choisie est noire, on gagne 1 point. Sinon, on ne gagne pas de point.
On note M_n le gain moyen de points après n répétitions indépendantes de cette expérience.

' On cherche un entier n tel que :

$$P\left(|M_n - 0{,}3| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant 0{,}5.$$

Notons X_k le nombre de points gagnés au k-ième tirage, $1 \leqslant k \leqslant n$.

X_k suit la loi de Bernoulli de probabilité $p = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$ et de variance $\sigma^2 = 0{,}3 \times (1 - 0{,}3) = 0{,}21$.

De plus, par définition, les X_k sont indépendantes donc on peut utiliser l'inégalité de concentration :

$$P\left(|M_n - 0{,}3| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant \frac{0{,}21}{0{,}1^2 n}.$$

On souhaite que $P\left(|M_n - 0{,}3| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant 0{,}5$ donc il suffit de choisir n tel que :

$$\frac{0{,}21}{0{,}1^2 n} \leqslant 0{,}5 \iff \frac{0{,}1^2 n}{0{,}21} \geqslant \frac{1}{0{,}5}$$

$$\iff 0{,}1^2 n \geqslant \frac{1}{0{,}5} \times 0{,}21$$

$$\frac{0{,}21}{0{,}1^2 n} \leqslant 0{,}5 \iff n \geqslant \frac{1}{0{,}5} \times \frac{0{,}21}{0{,}1^2}$$

$$\iff n \geqslant 42.$$

Exercice n°14

On lance n fois un dé à 6 faces et on regarde la fréquence d'obtention de la face « 6 ».

D'après le théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres), si on note pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{cases} X_k = 1 & \text{si on obtient un « 6 »} \\ X_k = 0 & \text{Si on n'obtient pas un « 6 »} \end{cases}$$

où les X_k sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{6}$ et donc d'espérance $\mu = \frac{1}{36}$, on peut écrire pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) = 0$$

ce qui signifie que la fréquence $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ se rapprochera de $\mu = \frac{1}{6}$ quand n deviendra de plus en plus grand.

Exercice n°15

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ définie de la façon suivante : on part de 0 et, à chaque étape,

— on a une probabilité p de faire un pas vers la droite ;

— on a une probabilité $1 - p$ de faire un pas vers la gauche.

Autrement dit, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n = 1) = p \;\text{ et } P(X_n = -1) = 1 - p.$$

On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Regardons les premières valeurs de S_n :
   — $S_1 \in \{-1; 1\}$ car X_1 ne peut prendre pour valeurs que -1 ou 1 ;
   — $S_2 \in \{-1-1; -1+1; 1-1; 1+1\}$ soit $S_2 \in \{-2; 0; 2\}$;
   — $S_3 \in \{-3; -1; 1; 3\}$.
   On s'aperçoit que S_n est la position à laquelle nous nous trouvons dans $\mathbb{Z}$ à la fin de l'étape n.
2. $\mu = E(X_k) = 1 \times P(X_k = 1) + (-1) \times P(X_k = -1) = 1 \times p +$
3. $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et d'après le théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres),

   $$\forall \delta > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) = 0.$$

   Cela signifie donc que $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = 2p - 1.$

Exercice n°16

On se propose dans cet exercice de démontrer l'inégalité de concentration qui stipule que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes réelles indépendantes ayant toutes la même loi d'espérance μ et de variance σ^2 alors,

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Par linéarité de l'espérance, on a :

   $$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_1 + \cdots + X_n)$$
   $$= \frac{1}{n}\left[E(X_1) + \cdots + E(X_n)\right] = \frac{1}{n}(\mu + \cdots + \mu) = \frac{1}{n} \times n$$

   $E(M_n) = \mu$.

   De plus, comme les X_k sont indépendantes, on a :

   $$V(M_n) = V\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + \cdots + X_n)$$
   $$= \frac{1}{n^2}\left[V(X_1) + \cdots + V(X_n)\right] = \frac{1}{n}(\sigma^2 + \cdots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n, pour tout $\delta > 0$, on a :

   $$P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$