2

Probabilités conditionnelles

Série d'exercices

Corrigés Classe : Tle Spé Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6% sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98% des lecteurs MP3 défectueux et 5% des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- D l'événement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'événement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. (a) Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

   (b) On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

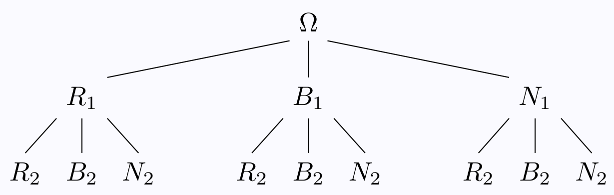
   Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942.

Exercice n°2

Une urne, notée U_1, contient k boules rouges, $k+1$ boules blanches et 2 boules noires, où k est un entier naturel non nul.
Une urne, notée U_2, contient 3 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule noire.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Une *expérience* consiste à tirer au hasard une boule de U_1, à la mettre dans U_2, puis à tirer une boule de U_2.
Pour $i=1$ et $i=2$, on note :

- R_i l'événement : « On tire une boule rouge de l'urne U_i. »
- B_i l'événement : « On tire une boule blanche de l'urne U_i. »
- N_i l'événement : « On tire une boule noire de l'urne U_i. »
- D l'événement : « On tire deux boules de couleurs différentes lors de l'expérience. »

1. Compléter l'arbre des probabilités de l'expérience ci-dessous.
2. Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D) = \dfrac{k+2}{2k+3}$.



Exercice n°3

Dans une école, il y a 3 classes C_1, C_2, C_3 dont le nombre d'élèves est respectivement 44, 33, 40. Chaque classe a une probabilité de gagner à un jeu respectivement de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.
Si un élève gagne, quelle est la probabilité qu'il vienne de la classe C_2 ?

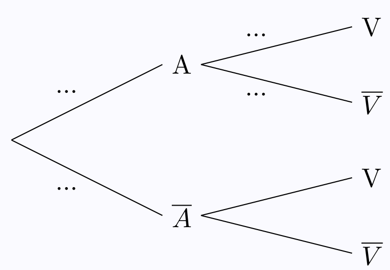
Exercice n°4

L'agence TOCAR propose aux youtubers de les faire connaître sur Internet. Elle affirme que ses clients possèdent 80% de vidéos vues plus de 200 000 fois.
Les statistiques de cette agence montrent que si un youtuber met en ligne une vidéo en lien avec le thème principal de sa chaîne, la probabilité que cette vidéo soit vue plus de 200 000 fois est égale à 0,7.

La youtubeuse *Mimolette* fait appel à cette agence pour avoir plus de vidéos vues. Elle poste 80% de vidéos portant sur le thème principal de sa chaîne.
On appelle :

- L'événement A : « la youtubeuse poste une vidéo en rapport avec le thème principal de sa chaîne » ;
- L'événement V : « la vidéo postée est vue plus de 200 000 fois ».

1. Compléter l'arbre des probabilités suivant :



2. Calculer la probabilité qu'une vidéo soit vue plus de 200 000 fois sachant qu'elle n'a pas de lien avec le thème principal de la chaîne si l'agence TOCAR disait la vérité.
3. Donner un encadrement du pourcentage de vidéos vues plus de 200 000 fois par client.

Exercice n°5

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :

- 5% des ordinateurs neufs sont défaillants ;
- 10% des ordinateurs récents sont défaillants ;
- 20% des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc. On note les événements suivants :

- N : « L'ordinateur est neuf »

— R : « L'ordinateur est récent »
— A : « L'ordinateur est ancien »
— D : « L'ordinateur est défaillant »
— $\overline{D}$ l'événement contraire de D.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.
3. Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,132 5.
4. Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

Exercice n°6

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
Les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
On note A l' événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement C : « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'événement D : « le sac est défectueux ».
3. Calculer la probabilité de l'événement E : « le sac ne présente aucun défaut ».
4. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

Exercice n°7

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4.
Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :
   — A_1 l'événement : « la personne est absente lors d'un premier appel » ;
   — R_1 l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».
   Calculer $p(R_1)$.
2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois à une heure différente et alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3.
   Sachant qu'elle est présente, la probabilité pour qu'elle n'accepte pas de répondre au questionnaire est encore 0,8.
   Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
   On note :
   — A_2 l'événement : « la personne est absente lors du second appel » ;
   — R_2 l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;
   — R l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire ».
   Montrer que la probabilité de R est 0,176.
3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, calculer la probabilité que la réponse ait eu lieu lors du premier appel.

Exercice n°8

Une maladie M affecte une personne sur 1 000 dans une population donnée.
Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99% (lorsque cette maladie est effectivement présente). En revanche, pour un individu sain, la probabilité que le test soit positif est de 0,1% (on dit que 0,1% est le taux de faux positifs).

Si un test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit réellement malade ?

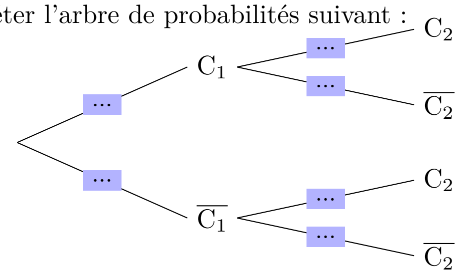
Exercice n°9

On a un test de sérologie pour identifier une maladie qui atteint 0,5% de la population.
Sur 99% des malades, le test réagit (c'est-à-dire que 99% des malades sont identifiés par le test) mais sur 2% des sains, le test montre une fausse réaction positive. Sur un patient, un test est positif. Quelle est la probabilité d'être malade ?

Exercice n°10

Madame Laguigne est très malchanceuse. Elle a constaté que la probabilité pour qu'une montre qu'elle vient d'acheter fonctionne correctement est égale à 0,7.
De plus, si la montre qu'elle vient d'acheter ne fonctionne pas, la probabilité pour que la montre qu'elle achètera après fonctionne correctement est égale à 0,5 alors que si la montre fonctionne bien cette probabilité est égale à 0,7.
On pose :
— C_n l'événement : « la n-ième montre fonctionne correctement » pour un entier n supérieur ou égal à 1 ;
— p_n la probabilité que C_n se réalise.

1. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Montrer que la probabilité que la deuxième montre fonctionne est égale à 0,64.

3. Justifier l'égalité : $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}5$.
4. On pose :

$$u_n = p_n - 0{,}625.$$

   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) En déduire p_n en fonction de n.

   (c) Vers quel nombre se rapproche p_n quand n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Exercice n°11

Une étude réalisée sur les étudiants d'une université a permis d'établir que 70% des étudiants possèdent un ordinateur et que, parmi ceux-ci, 40% possèdent une automobile.
On sait aussi que 55% des étudiants de l'université ne possèdent pas d'automobile.
On choisit au hasard un étudiant de cette université et on note :
- O l'événement « l'étudiant possède un ordinateur »
- A l'événement « l'étudiant possède une automobile ».

Les événements O et A sont-ils indépendants ?

Exercice n°12

Chaque jour, Jeanne ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l'un des deux événements suivants se produit :
- D : « Son portable est déchargé »
- O : « Elle a oublié son portable chez elle »

On suppose que ces deux événements sont indépendants.

Elle a observé, d'une part, que la probabilité de D est égale à 0,05 et, d'autre part, qu'elle oublie son portable chez elle un jour sur dix.

1. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité que Jeanne oublie son portable chez elle et qu'il ne soit pas déchargé ?
2. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité qu'elle ne puisse pas se servir de son portable ?

Exercice n°13

Une urne contient trois boules B_1, B_2 et B_3 indiscernables au toucher. On vide l'urne par tirages successifs des boules.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
   Sont-ils équiprobables ?
2. On considère les événements suivants :
   - A : « La boule B_1 est extraite de l'urne avant B_2. »
   - B : « La boule B_1 est extraite au premier tirage. »
   - C : « La boule B_1 est extraite au deuxième tirage. »

   (a) Déterminer les probabilités de ces trois événements.

   (b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

   (c) Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice n°14

Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant » et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ».
On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les événements :
- R : « le jeton tiré est rouge »,
- V : « le jeton tiré est vert »,
- G : « le jeton tiré est gagnant ».

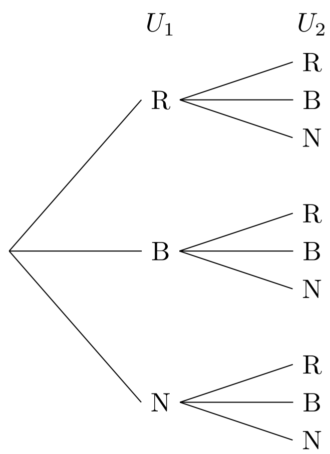
1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité de l'événement « le jeton tiré est un jeton vert et marqué gagnant ».
3. Soit P(G) la probabilité de tirer un jeton gagnant.
   Montrer que $P(G) = \dfrac{2}{5}$.
4. Sachant que le jeton tiré est gagnant, calculer la probabilité qu'il soit de couleur rouge.
5. On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, deux jetons dans l'urne.
   Calculer la probabilité que les deux jetons soient marqués « gagnant ». Expliquer votre démarche.

Exercice n°15

On considère un jeu où deux urnes U_1 et U_2 sont remplies de 12 boules.
Dans U_1, il y a 8 boules rouges, 3 boules blanches et 1 boule noire.
Dans U_2, il y a 1 boule rouge, 8 boules blanches et 3 boules noires.
Le joueur tire au hasard une boule dans U_1, puis une autre dans U_2.
On note :
- R l'événement : « la boule tirée est rouge » ;
- B l'événement : « la boule tirée est blanche » ;
- N l'événement : « la boule tirée est noire ».

Si les deux boules tirées sont de la même couleur, le joueur gagne 10 € ; sinon, il ne gagne rien.
Pour jouer, on doit s'acquitter d'une somme de 5 €.
On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Déterminer la loi de probabilités de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X, puis interpréter ce résultat.

4. Calculer la variance puis l'écart-type de X.

Exercice n°16

On dispose d'un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et d'un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). Ces dés sont parfaitement équilibrés.
On lance ces deux dés et on s'intéresse à la somme des deux chiffres obtenus.
Soit X la variable aléatoire représentant l'ensemble des sommes possibles.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. Calculer l'écart-type de X.

Exercice n°17

On lance 3 pièces bien équilibrées valant respectivement 1 €, 2 € et 2 €.
On veut étudier la variable aléatoire X qui totalise le montant en euros des pièces tombées sur « Pile ».

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. Quelles sont les différentes valeurs possibles pour X ? Donner la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 3 € ?

Exercice n°18

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
Dans U_1, il y a n boules noires et 10 boules blanches.
Dans U_2, il y a 10 boules noires et $n+1$ boules blanches.

On tire au hasard une boule dans chaque urne.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
2. Pour quelle valeur de n cette probabilité est maximale ?

Exercice n°19

Pour une mise de 0,50 €, on lance un dé cubique équilibré. Tout résultat pair fait gagner le nombre d'euros indiqué sur le dé et tout résultat impair fait perdre le nombre d'euros indiqué sur le dé. Par exemple, obtenir 2 permet de gagner 2 € mais obtenir 3 fait perdre 3 €.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique (en tenant compte de la mise).

1. Établir la loi de probabilité de X.
2. Le jeu est-il équitable ? Justifier.

Exercice n°20

Dans une fête foraine, pour une mise initiale de 3 €, le joueur est invité à lancer deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6.

— Si le résultat est un « double », le joueur empoche le montant en euros égal à la somme des points obtenus.
— Si un seul 6 apparaît, le joueur gagne le montant en euros indiqué sur l'autre dé.
— Dans les autres cas, la partie est perdue.

On désigne par G la variable aléatoire définie par le « gain » du joueur (gain qui peut être négatif).

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Calculer l'espérance mathématique de G. Le jeu est-il équitable ?
3. Calculer l'écart-type de G. Interpréter le résultat.

Exercice n°21

Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

X	50	100	200	500
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

On souhaite modifier les valeurs de X, tout en conservant les mêmes probabilités, afin que son espérance soit égale à 0 et son écart-type égal à 1.
Proposer les valeurs de la nouvelle variable aléatoire.
Pour cela, on s'aidera des formules suivantes :

$$E(aX+b) = aE(X)+b \quad ; \quad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

Exercice n°22

On dispose d'une urne contenant 1 boule noire, 1 boule rouge, 2 boules jaunes et 3 boules bleues.
Un jeu consiste à effectuer deux tirages successifs sans remise dans cette urne.

— quand on tire une boule noire au 1^{er} ou 2^{nd} tirage, on ne gagne rien ;
— quand on tire une boule bleue au 2^{nd} tirage, on gagne 1 € ;
— quand on tire une boule jaune au 2^{nd} tirage, on gagne 5 € ;
— quand on tire une boule rouge au 2^{nd} tirage, on gagne 10 €.

Pour avoir le droit de participer, un joueur doit miser 3 €.
On appelle X la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X. Quelle conclusion peut-on alors faire ?
4. À la vue de la dernière conclusion, déterminer la mise de départ afin que le jeu soit équitable.
5. La mise de départ trouvée à la question précédente ne satisfait pas l'organisateur du jeu, celui-ci souhaite modifier les règles du jeu. Il se demande s'il peut trouver une mise de départ pour laquelle le jeu serait équitable s'il multiplie tous les gains absolus par un entier a non nul.
   On pose Y la variable aléatoire représentant les gains algébriques de ce jeu avec les nouvelles règles. On note m la mise de départ.
   (a) Expliquer pourquoi $Y = aX + 3a - m$.
   (b) Donner alors une réponse à la question de l'organisateur.