2

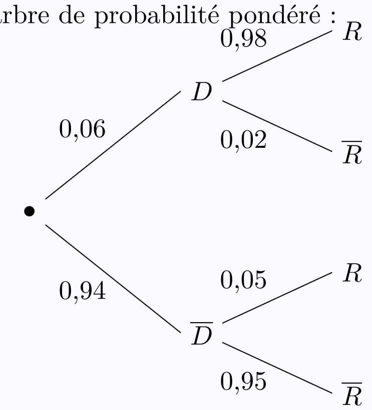
Probabilités conditionnelles

Corrigés

Série d'exercices — Classe : Tle Spé — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

1. Voici l'arbre de probabilité pondéré :



2. (a) En suivant la deuxième branche :
$p(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{R}}) = 0{,}06 \times 0{,}02 = \underline{0{,}001\,2}$.

(b) Il y a erreur de contrôle pour les événements disjoints $\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{R}}$ et $\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{R}$.
Sa probabilité est donc :

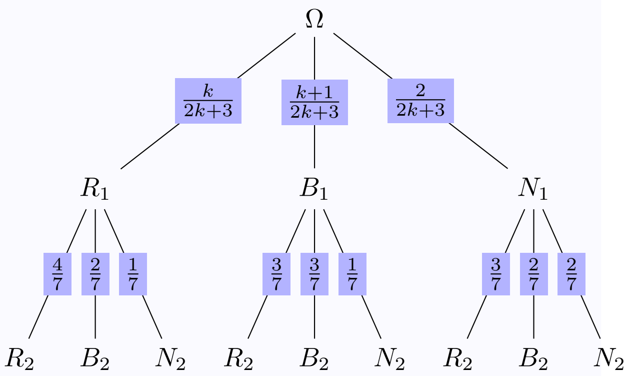
$$\begin{aligned} p(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{R}}) + p(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{R}) &= 0{,}06 \times 0{,}02 + 0{,}94 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}001\,2 + 0{,}047\,0 \\ &= \underline{0{,}048\,2}. \end{aligned}$$

3. La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à :

$$\begin{aligned} p\left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{R}}\right) + p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{R}}\right) &= 0{,}06 \times 0{,}02 + 0{,}94 \times 0{,}95 \\ &= 0{,}001\,2 + 0{,}893\,0 \\ &= \underline{0{,}894\,2}. \end{aligned}$$

Exercice n°2

1. Voici l'arbre de probabilité complété :

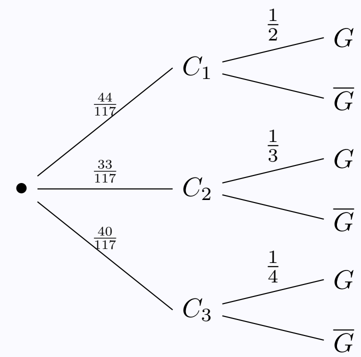


2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(D) &= p_{R_1}(B_2) + p_{R_1}(N_2) + p_{B_1}(R_2) + p_{B_1}(N_2) + p_{N_1}(R_2) + p_{N_1} \\ &= 1 - \left(p_{R_1}(R_2) + p_{B_1}(B_2) + p_{N_1}(N_2)\right) \\ &= 1 - \left(\frac{k}{2k+3} \times \frac{4}{7} + \frac{k+1}{2k+3} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{2k+3} \times \frac{2}{7}\right) \\ &= 1 - \frac{4k+3k+3+4}{14k+21} \\ p(D) &= \frac{k+2}{2k+3}. \end{aligned}$$

Exercice n°3

Dans une école, il y a 3 classes C_1, C_2, C_3 dont le nombre d'élèves est respectivement 44, 33, 40. Chaque classe a une probabilité de gagner à un jeu respectivement de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.
Notons G l'événement : « L'élève gagne ».
Il y a en tout $44 + 33 + 40 = 117$ élèves sur l'ensemble des trois classes. On a alors l'arbre de la page suivante.



On en déduit :

$$p(G) = \frac{44}{117} \times \frac{1}{2} + \frac{33}{117} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{117} \times \frac{1}{4} = \frac{43}{117}.$$

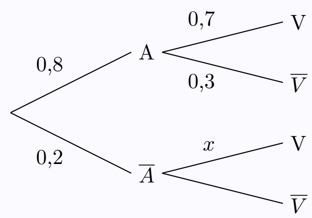
On sait de plus que :

$$p_G\left(C_2\right) = \frac{p(C_2 \cap G)}{p(G)} = \frac{\frac{33}{117} \times \frac{1}{3}}{\frac{43}{117}} = \frac{11}{43}.$$

Ainsi, si un élève gagne, la probabilité qu'il vienne de la classe C_2 est $\dfrac{11}{43}$.

Exercice n°4

1. L'arbre de probabilité est le suivant :



2. On cherche $x = p_{\overline{A}}(V)$. Pour cela, on a :

$$\begin{aligned} 0{,}8 &= 0{,}8 \times 0{,}7 + 0{,}2x \\ x &= \frac{0{,}8 - 0{,}8 \times 0{,}7}{0{,}2} \\ x &= \frac{0{,}24}{0{,}2} \\ x &= 1{,}2 > 1. \end{aligned}$$

Impossible car une probabilité est comprise entre 0 et 1.

3. D'après la question précédente, $p(V) = 0{,}56 + 0{,}2x$. De

plus, $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant 0{,}2x \leqslant 0{,}2 \\ \iff & 0{,}56 \leqslant 0{,}56 + 0{,}2x \leqslant 0{,}76 \\ \iff & 0{,}56 \leqslant p(V) \leqslant 0{,}76. \end{aligned}$$

Ainsi, Mimolette pourra espérer avoir entre 56% et 76% de ses vidéos, vues plus de 200 000 fois.

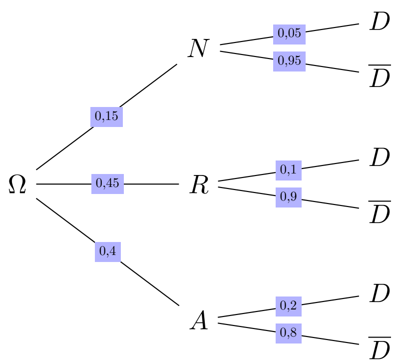
Exercice n°5

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :
- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :
- 5% des ordinateurs neufs sont défaillants ;
- 10% des ordinateurs récents sont défaillants ;
- 20% des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc. On note les événements suivants :
- N : « L'ordinateur est neuf »
- R : « L'ordinateur est récent »
- A : « L'ordinateur est ancien »
- D : « L'ordinateur est défaillant »
- $\overline{D}$ l'événement contraire de D.

1. Voici l'arbre pondéré :



2. La probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant est donnée par :

$$P(N \cap D) = P(N) \times P_N(D) = 0{,}15 \times 0{,}05 = 0{,}007\,5.$$

3. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap R) + P(D \cap N).$$

Ainsi, d'après l'arbre, on a :

$$P(D) = 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}45 \times 0{,}1 + 0{,}007\,5 = 0{,}132\,5.$$

4. La probabilité que l'ordinateur choisi soit ancien sachant qu'il est défaillant est donnée par :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}08}{0{,}132\,5} = \frac{32}{53} \approx 0{,}60.$$

Exercice n°6

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
Les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
On note A l' événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. Comme A et B sont indépendants,

$$\begin{aligned} P(C) &= p(A \cap B) \\ &= p(A) \times p(B) \\ &= 0{,}02 \times 0{,}01 \\ P(C) &= 0{,}000\,2. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} P(D) &= p(A \cup B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0{,}02 + 0{,}01 - 0{,}000\,2 \\ P(D) &= 0{,}029\,8. \end{aligned}$$

3. On a $E = \overline{D}$ d'où :

$$\begin{aligned} P(E) &= 1 - p(D) \\ &= 1 - 0{,}029\,8 \\ P(E) &= 0{,}970\,2. \end{aligned}$$

4. A et B étant indépendants, par propriété :

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B) = \underline{0{,}01}.$$

Exercice n°7

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4.
Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. $$\begin{aligned} P(R_1) &= P_{\overline{A_1}}(R_1) \times P(\overline{A_1}) \\ &= 0{,}2 \times 0{,}6 \\ P(R_1) &= 0{,}12. \end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R_1) + P(R_2) \\ &= 0{,}12 + 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}12 + 0{,}056 \\ P(R) &= 0{,}176. \end{aligned}$$

3. Nous cherchons $P_R(R_1)$.

$$P_R(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R)}{P(R)} \text{Or, } P(R_1 \cap R) = P(R_1).$$
$$= \frac{0{,}12}{0{,}176}$$
$$P_R(R_1) = \frac{15}{22} \approx 0{,}682.$$

Exercice n°8

Une maladie M affecte une personne sur 1 000 dans une population donnée.
Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99% (lorsque cette maladie est effectivement présente). En revanche, pour un individu sain, la probabilité que le test soit positif est de 0,1% (on dit que 0,1% est le taux de faux positifs).

On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population.
On pose :
- M : « l'individu est malade »
- T : « le test est positif ».

Alors, l'énoncé nous dit que :
- $P(M) = \dfrac{1}{1\,000}$, d'où $P(\overline{M}) = \dfrac{999}{1\,000}$;
- $P_T(M) = \dfrac{99}{100}$;
- $P_{\overline{M}}(T) = \dfrac{1}{1\,000}$.

On cherche alors à déterminer $P_T(M)$.

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{P_T(M) \times P(M)}{P_T(M) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})} \\ &= \frac{0{,}990}{0{,}999 + 0{,}990} \\ &\approx 0{,}498. \end{aligned}$$

Ainsi, si le test est positif, la probabilité que l'individu soit réellement malade est d'environ 0,5.

Exercice n°9

On a un test de sérologie pour identifier une maladie qui atteint 0,5% de la population.
Sur 99% des malades, le test réagit (c'est-à-dire que 99% des malades sont identifiés par le test) mais sur 2% des sains, le test montre une fausse réaction positive. Sur un patient, un test est positif.

On pose :
- M : « l'individu est malade »
- T : « le test est positif ».

Alors, l'énoncé nous dit que :
- $P(M) = 0{,}5\% = \dfrac{5}{1\,000} = \dfrac{1}{200}$, d'où $P(\overline{M}) = \dfrac{199}{200}$;
- $P_M(T) = \dfrac{99}{100}$;
- $P_{\overline{M}}(T) = 2\% = \dfrac{1}{50}$.

On cherche à déterminer $P_T(M)$.

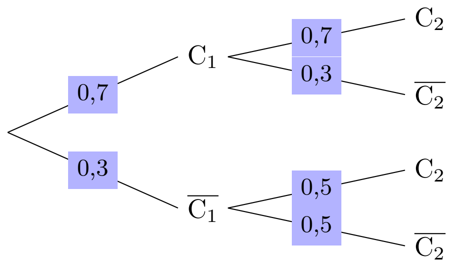
$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap P)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}99 \times 0{,}005}{0{,}99 \times 0{,}005 + 0{,}02 \times 0{,}995} \\ &\approx 0{,}2. \end{aligned}$$

Il y a donc environ 20% des individus malades sachant que le test est positif.

Exercice n°10

Madame Laguigne est très malchanceuse. Elle a constaté que la probabilité pour qu'une montre qu'elle vient d'acheter fonctionne correctement est égale à 0,7.
De plus, si la montre qu'elle vient d'acheter ne fonctionne pas, la probabilité pour que la montre qu'elle achètera après fonctionne correctement est égale à 0,5 alors que si la montre fonctionne bien cette probabilité est égale à 0,7.
On pose :
- C_n l'événement : « la n-ième montre fonctionne correctement » pour un entier n supérieur ou égal à 1 ;
- p_n la probabilité que C_n se réalise.

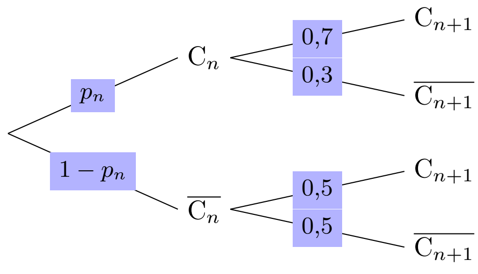
1. L'arbre de probabilités est le suivant :



2. La probabilité que la deuxième montre fonctionne correctement est :

$$\begin{aligned} P(C_2) &= P(C_1 \cap C_2) + P(\overline{C_1} \cap C_2) \\ &= P(C_1) \times P_{C_1}(C_2) + P(\overline{C_1}) \times P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}64. \end{aligned}$$

3. À l'étape n, nous avons l'arbre suivant :



Ainsi,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times 0{,}7 + (1 - p_n) \times 0{,}5 \\ &= 0{,}7p_n + 0{,}5 - 0{,}5p_n \\ p_{n+1} &= 0{,}2p_n + 0{,}5. \end{aligned}$$

4. (a) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}625$
$$= 0{,}2p_n + 0{,}5 - 0{,}625$$
$$= 0{,}2p_n - 0{,}125$$
$$= 0{,}2\left(p_n - \frac{0{,}125}{0{,}2}\right)$$
$$= 0{,}2(p_n - 0{,}625)$$
$$= 0{,}2u_n$$
Ainsi, (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de premier terme :
$$u_1 = p_1 - 0{,}625 = 0{,}7 - 0{,}625 = 0{,}075.$$

(b) On déduit de la question précédente que :
$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0{,}075 \times 0{,}2^{n-1}$$
et, comme $u_n = p_n - 0{,}625$:
$$p_n = u_n + 0{,}625, \text{soit} p_n = 0{,}075 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}625.$$

(c) En utilisant la calculatrice, on constate plus n grandit, plus $0{,}2^n$ se rapproche de 0, donc p_n se rapproche de 0,625.
Cela signifie qu'à longs termes, la probabilité que madame Laguigne achète une montre qui fonctionne correctement se rapprochera de 0,625.

Exercice n°11

Une étude réalisée sur les étudiants d'une université a permis d'établir que 70% des étudiants possèdent un ordinateur et que, parmi ceux-ci, 40% possèdent une automobile.
On sait aussi que 55% des étudiants de l'université ne possèdent pas d'automobile.
On choisit au hasard un étudiant de cette université et on note :
- O l'événement « l'étudiant possède un ordinateur »
- A l'événement « l'étudiant possède une automobile ».
- $P(O) = 0{,}7$;
- $P(\overline{A}) = 0{,}55$ donc $P(A) = 0{,}45$;
- $P_O(A) = 0{,}4$.

Ainsi, $P_O(A) \neq P(A)$ donc A et O ne sont pas indépendants.

Exercice n°12

Chaque jour, Jeanne ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l'un des deux événements suivants se produit :
- D : « Son portable est déchargé »
- O : « Elle a oublié son portable chez elle »

On suppose que ces deux événements sont indépendants.
Elle a observé, d'une part, que la probabilité de D est égale à 0,05 et, d'autre part, qu'elle oublie son portable chez elle un jour sur dix.

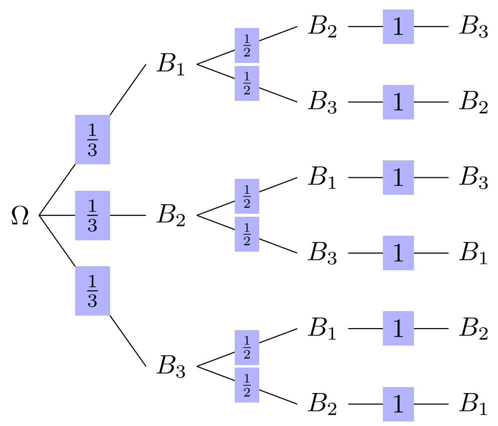
1. D et O sont indépendants, donc $\overline{D}$ et O aussi. Ainsi,
$$P(\overline{D} \cap O) = P(\overline{D}) \times P(O)$$
$$= (1 - 0{,}05) \times 0{,}1$$
$$= 0{,}095.$$
Par conséquent, la probabilité pour que Jeanne oublie son portable chez elle et qu'il soit déchargé est égale à 0,095.

2. $P(D \cup O) = P(D) + P(O) - P(D \cap O)$
$$= 0{,}05 + 0{,}1 - 0{,}005$$
$$= 0{,}145.$$
Ainsi, la probabilité pour que Jeanne ne puisse pas se servir de son portable un jour donné est égale à 0,145.

Exercice n°13

Une urne contient trois boules B_1, B_2 et B_3 indiscernables au toucher. On vide l'urne par tirages successifs des boules.

1. Construisons un arbre de probabilités :



Il y a donc 6 tirages possibles, et chaque possibilité a une probabilité de $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{6}$ d'être obtenue. Ces tirages sont donc équiprobables.

2. (a)
- « La boule B_1 est extraite avant B_2 » est possible dans 3 cas : $B_1 - B_2 - B_3$, $B_1 - B_3 - B_2$ et $B_3 - B_1 - B_2$.
Ainsi, $P(A) = 3 \times \dfrac{1}{6}$, soit $P(A) = \dfrac{1}{2}$.
- B_1 est extraite au premier tirage dans 1 cas sur 3 car il y a 3 boules possibles au premier tirage.
Donc $P(B) = \dfrac{1}{3}$.
- La boule B_1 est extraite au deuxième tirage dans 2 cas sur 6, donc $P(C) = \dfrac{1}{3}$.

(b) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$
et $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} \neq P(A \cap B)$.
Ainsi, A et B ne sont pas indépendants.

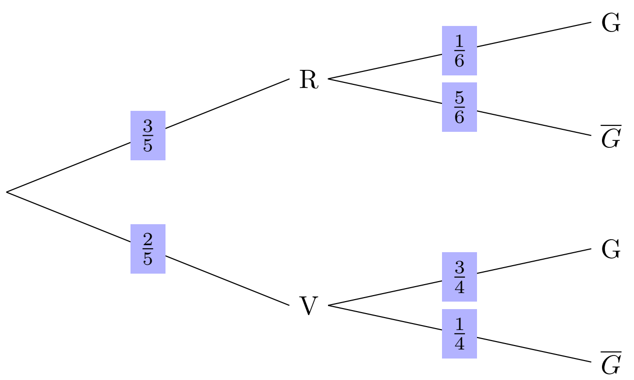
(c) $P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$
et $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} = P(A \cap C)$.
Ainsi, A et C sont indépendants.

Exercice n°14

Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant » et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ».
On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les événements :

— R : « le jeton tiré est rouge »,
— V : « le jeton tiré est vert »,
— G : « le jeton tiré est gagnant ».

1. L'arbre de probabilité modélisant la situation est le suivant :



2. On doit ici calculer $P(V \cap G)$ qui, d'après le cours, est égale à :

$$P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

3. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(G) &= P(V \cap G) + P(V \cap \overline{G}) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{4}{10} \\ P(G) &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

4. On souhaite ici calculer $P_G(R)$ qui, d'après le cours, est égale à :

$$\begin{aligned} P_G(R) &= \frac{P(R \cap G)}{P(G)} \\ &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

5. Tirer au hasard et simultanément deux jetons revient à en tirer un, puis un autre (sans remettre le premier dans l'urne).
On sait que la probabilité de tirer un premier jeton gagnant est $P(G) = \frac{2}{5}$ d'après la question 3. Mais une fois ce jeton choisi, nous avons une autre configuration :

— si le premier jeton gagnant est rouge, alors il n'y a plus de jeton gagnant rouge pour le second tirage ; la probabilité de tirer un jeton gagnant est donc égale à :
$$P(V \cap G) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}.$$
— si le premier jeton gagnant est vert, alors il y a encore un jeton rouge gagnant (sur les 9 jetons restants) et 2 jetons gagnants verts ; la probabilité de tirer un second jeton gagnant est donc égale à :
$$\begin{aligned} P(R \cap G) + P(V \cap G) &= \frac{6}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La probabilité de tirer simultanément deux jetons gagnants est alors égale à :

$$\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{15}.$$

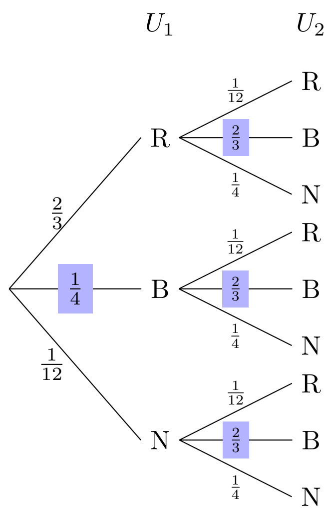
Exercice n°15

On considère un jeu où deux urnes U_1 et U_2 sont remplies de 12 boules.
Dans U_1, il y a 8 boules rouges, 3 boules blanches et 1 boule noire.
Dans U_2, il y a 1 boule rouge, 8 boules blanches et 3 boules noires.
Le joueur tire au hasard une boule dans U_1, puis une autre dans U_2.
On note :

— R l'événement : « la boule tirée est rouge » ;
— B l'événement : « la boule tirée est blanche » ;
— N l'événement : « la boule tirée est noire ».

Si les deux boules tirées sont de la même couleur, le joueur gagne 10 € ; sinon, il ne gagne rien.
Pour jouer, on doit s'acquitter d'une somme de 5 €.
On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. L'arbre de probabilités complété :



2. La probabilité d'avoir deux boules rouges est :
$\frac{2}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$.
La probabilité d'avoir deux boules blanches est :
$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'avoir deux boules noires est :
$\dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{48}$.
Ainsi, la probabilité d'avoir deux boules de la même couleur est :

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{35}{144}.$$

Par conséquent, la probabilité d'avoir deux boules de couleurs différentes est :

$$1 - \frac{35}{144} = \frac{109}{144}.$$

Le gain algébrique du joueur peut être -5 € (s'il paie 5 € pour jouer et s'il ne gagne pas) ou 5 € (s'il paie 5 € et qu'il gagne 10 €). On a alors :

X	-5	5
$p(X)$	$\dfrac{109}{144}$	$\dfrac{35}{144}$

3. L'espérance mathématique de X est :
$E(X) = -5 \times \dfrac{109}{144} + 5 \times \dfrac{35}{144}$
$E(X) = -\dfrac{185}{72} \approx -2{,}57.$
Cela signifie que si l'on participe un grand nombre de fois à ce jeu, on peut « espérer » perdre en moyenne 2,57 €.
4. La variance de X est :
$$V(X) = \frac{109}{144}\left[-5-\left(-\frac{185}{72}\right)\right]^2 + \frac{35}{144}\left[5-\left(-\frac{185}{72}\right)\right]^2$$
$$= \frac{95\,375}{5\,184} \approx 18{,}4.$$

Exercice n°16

On dispose d'un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et d'un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). Ces dés sont parfaitement équilibrés.
On lance ces deux dés et on s'intéresse à la somme des deux chiffres obtenus.
Soit X la variable aléatoire représentant l'ensemble des sommes possibles.

1. L'ensemble des sommes possibles est donné par le tableau suivant :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

On a alors :

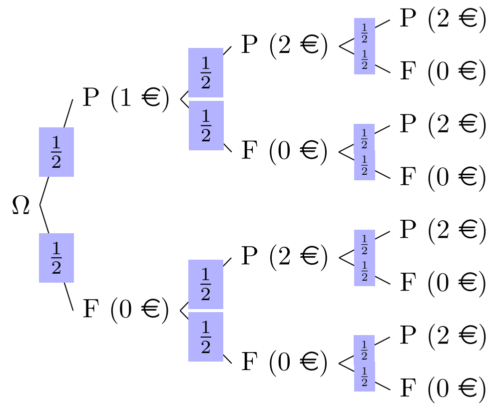
X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

2. $E(X) = 2 \times \dfrac{1}{24} + 3 \times \dfrac{1}{12} + \cdots + 10 \times \dfrac{1}{24}$
$E(X) = 6.$
3. La variance de X est : $V(X) = \dfrac{25}{6}$ donc son écart-type est $\sigma X = \dfrac{5}{\sqrt{6}} \approx 2.$

Exercice n°17

On lance 3 pièces bien équilibrées valant respectivement 1 €, 2 € et 2 €.
On veut étudier la variable aléatoire X qui totalise le montant en euros des pièces tombées sur « Pile ».

1. L'arbre est le suivant :



2. On a : X $= \{0;1;2;3;4;5\}$ d'après l'arbre précédent, d'où la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
p(X= x_i)	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. $p(X \geqslant 3) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) = \dfrac{1}{2}.$

Exercice n°18

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
Dans U_1, il y a n boules noires et 10 boules blanches.
Dans U_2, il y a 10 boules noires et $n+1$ boules blanches.

1. La probabilité de tirer deux boules noires est :
$$\frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+11} = \frac{10n}{(n+10)(n+11)}.$$
La probabilité de tirer deux boules blanches est :
$$\frac{10}{n+10} \times \frac{n+1}{n+11} = \frac{10(n+1)}{(n+10)(n+11)}.$$
La probabilité de tirer deux boules de même couleur est la somme de ces deux probabilités donc :
$$\frac{10(2n+1)}{(n+10)(n+11)}.$$
2. Posons $f(x) = \dfrac{10(2x+1)}{(x+10)(x+11)} = \dfrac{20x+10}{x^2+21x+110}.$
Alors,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{20(x^2+21x+110) - (20x+10)(2x+21)}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{20x^2+420x+2\,200-40x^2-420x-20x-210}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{-20x^2-20x+1\,990}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{10(-2x^2-2x+199)}{(x^2+21x+110)^2} \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $-2x^2 - 2x + 19$ est :

$$\Delta = 4 + 8 \times 199 = 1\,596.$$

Il a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{1\,596}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{399}}{2} > 0$$

et

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{1\,596}}{-4} = \frac{-1 - \sqrt{399}}{2} < 0.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

On voit alors que $f(x)$ atteint son maximum pour $x = \dfrac{-1 + \sqrt{399}}{2} \approx 9$.

Ainsi, pour $n = 9$, la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est maximale.

Exercice n°19

Pour une mise de 0,50 €, on lance un dé cubique équilibré. Tout résultat pair fait gagner le nombre d'euros indiqué sur le dé et tout résultat impair fait perdre le nombre d'euros indiqué sur le dé. Par exemple, obtenir 2 permet de gagner 2 € mais obtenir 3 fait perdre 3 €.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique (en tenant compte de la mise).

1. La loi de probabilité de X est :

$X = x_i$	$-1{,}5$	$1{,}5$	$-3{,}5$	$3{,}5$	$-5{,}5$	$5{,}5$
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1{,}5 + 1{,}5 - 3{,}5 + 3{,}5 - 5{,}5 + 5{,}5) \times \frac{1}{6} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le jeu est donc équitable.

Exercice n°20

Dans une fête foraine, pour une mise initiale de 3 €, le joueur est invité à lancer deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6.

— Si le résultat est un « double », le joueur empoche le montant en euros égal à la somme des points obtenus.
— Si un seul 6 apparaît, le joueur gagne le montant en euros indiqué sur l'autre dé.
— Dans les autres cas, la partie est perdue.

On désigne par G la variable aléatoire définie par le « gain » du joueur (gain qui peut être négatif).

1. La loi de probabilité de G est :

$G = g_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	7	9
$p(G = g_i)$	$\frac{20}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. $$\begin{aligned} E(G) &= -3 \times \frac{20}{36} - 2 \times \frac{1}{36} + \cdots + 9 \times \frac{1}{36} \\ &= -1. \end{aligned}$$
L'espérance étant non nulle, le jeu n'est pas équitable.

3. $\sigma(G) \approx 3{,}03$. Ainsi, sur un grand nombre de parties, le gain moyen par partie varie entre $-1 - 3{,}03 = -4{,}03$ € et $-1 + 3{,}03 = 2{,}03$ €.

Exercice n°21

Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

X	50	100	200	500
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

On souhaite modifier les valeurs de X, tout en conservant les mêmes probabilités, afin que son espérance soit égale à 0 et son écart-type égal à 1.
Proposer les valeurs de la nouvelle variable aléatoire.
Pour cela, on s'aidera des formules suivantes :

$$E(aX+b) = aE(X)+b \quad ; \quad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

$$E(X) = 235 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{33\,525} = 15\sqrt{149}.$$

De plus, on sait que :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

On cherche donc a et b afin d'avoir :

$$aE(X) + b = 0 \iff 235a + b = 0 \iff b = -235a.$$

De plus,

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

On souhaite que $\sigma(aX + b) = 1$ donc :

$$|a|\sigma(X) = 1 \iff |a| = \frac{1}{15\sqrt{149}}.$$

On en déduit alors que :

$$\text{si } a = \frac{1}{15\sqrt{149}} \text{ alors } b = -\frac{235}{15\sqrt{149}}.$$

Dans ce cas, la nouvelle variable aléatoire sera :

$$Y = \frac{X - 235}{15\sqrt{149}} = \left\{ -\frac{37}{3\sqrt{149}} \; ; \; -\frac{9}{\sqrt{149}} \; ; \; -\frac{7}{3\sqrt{149}} \; ; \; \frac{53}{3\sqrt{149}} \right\}.$$

De plus,

$$\text{si } a = -\frac{1}{15\sqrt{149}} \text{ alors } b = \frac{235}{15\sqrt{149}}.$$

Dans ce cas, la nouvelle variable aléatoire sera :

$$Z = -Y = \left\{ \frac{37}{3\sqrt{149}} \; ; \; \frac{9}{\sqrt{149}} \; ; \; \frac{7}{3\sqrt{149}} \; ; \; -\frac{53}{3\sqrt{149}} \right\}.$$

Exercice n°22

On dispose d'une urne contenant 1 boule noire, 1 boule rouge, 2 boules jaunes et 3 boules bleues.
Un jeu consiste à effectuer deux tirages successifs sans remise dans cette urne.

— quand on tire une boule noire au 1$^{\text{er}}$ ou 2$^{\text{nd}}$ tirage, on ne gagne rien ;
— quand on tire une boule bleue au 2$^{\text{nd}}$ tirage, on gagne 1 € ;
— quand on tire une boule jaune au 2$^{\text{nd}}$ tirage, on gagne 5 € ;
— quand on tire une boule rouge au 2$^{\text{nd}}$ tirage, on gagne 10 €.

1. L'arbre est présenté sur la deuxième colonne (faute de place sur la première), en fin du corrigé.
2. D'après l'arbre précédent,
   — $p(X=-3)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$
   — $p(X=-2)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{14}$
   — $p(X=2)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{21}$
   — $p(X=7)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{42}$.

   La loi de probabilité de X est alors :

x_i	-3	-2	2	7
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{42}$

3. $E(X)=(-3)\times\frac{2}{7}+(-2)\times\frac{5}{14}+2\times\frac{5}{21}+7\times\frac{5}{42}=-\frac{11}{42}$.
   Ainsi, le jeu est plutôt défavorable au joueur.
4. $E(X)=-\frac{11}{42}$ donc il faut ajouter à la mise de départ $\frac{11}{42}$ €, soit à peu près 0,26 €.
   La mise de départ doit donc être égale à $3-0{,}26=2{,}74$ €.
5. (a) Les gains *absolus* du jeu initial sont donnés par $\mathrm{X}+3$ (on ne considère pas ici la mise de départ de 3 €). Si on multiplie tous les gains absolus par a, les nouveaux gains sont donnés par la variable aléatoire $a(\mathrm{X}+3)=a\mathrm{X}+3a$. En tenant compte de la mise souhaitée m, on arrive à la variable aléatoire
   $\mathrm{Y}=a\mathrm{X}+3a-m$.

   (b) $E(Y)=E(aX+3a-m)=aE(X)+3a-m$ par linéarité de l'espérance.
   Ainsi, $E(Y)=-\frac{11a}{42}+3a-m$.
   Si le jeu est équitable, alors $E(Y)=0$, Autrement dit :
   $$-\frac{11a}{42}+3a-m=0,$$
   soit,
   $$m=-\frac{11a}{42}+3a=\left(-\frac{11}{42}+\frac{3\times 42}{42}\right)a=\frac{115}{42}a.$$
   Par conséquent, l'organisateur doit fixer la mise de départ à $\frac{115}{42}a$ € pour que le jeu soit équitable avec ces nouvelles règles.