Série d'exercices

Corrigés Classe : Tle Spé Maths Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

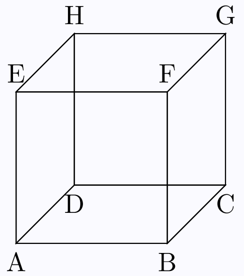
On considère trois points A, B et C non alignés, construire le point P défini par :

$$\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}.$$

Exercice n°2

On considère un cube ABCDEFGH, construire le point M défini par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}.$$



Exercice n°3

On considère une pyramide $SABCD$ de base carrée $ABCD$ de centre le point O et le point I milieu de la hauteur $[SO]$.

1. Donner une caractérisation du plan (SAC).
2. Justifier que le point I appartient à ce plan.

Exercice n°4

Dans un cube $ABCDEFGH$.

1. Donner une caractérisation du plan (BEG) à l'aide d'un point et de deux vecteurs non colinéaires
2. Justifier que le point P centre de la face $ABFE$ appartient au plan (BEG).

Exercice n°5

Dans un cube $ABCDEFGH$.

1. Donner une caractérisation du plan (EHB) à l'aide d'un point et de deux vecteurs non colinéaires
2. Justifier que le point C appartient au plan (EHB).

Exercice n°6

$ABCDEFGH$ est un cube, donner les positions relatives de :

a) (AB) et (FH) ;

b) (AF) et (CH) ;

c) (CFH) et (AB).

Exercice n°7

$ABCD$ est un tétraèdre, donner les positions relatives de :

a) (AB) et (CD) ;

b) (AC) et (BCD) ;

c) (AC) et (BD).

Exercice n°8

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré de centre le point O. Déterminer les intersections suivantes.

a) (SAB) et (SBC).

b) (SAC) et (SBD).

c) (SB) et (AC).

Exercice n°9

SABCD est une pyramide dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Les points M et N sont sur la face SAB et le point P sur la face SCD.

1. Déterminer l'intersection des plans (MNP) et (SAB), puis celle des plans (MNP) et (SCD).
2. Construire la section du plan (MNP) sur la pyramide.

Exercice n°10

On considère trois points A, B et C non alignés et les points M et N définis par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{BA}$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice n°11

Dans le cube $ABCDEFGH$, M et N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[FG]$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice n°12

Dans le tétraèdre $ABCD$, I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AD]$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice n°13

Dans le cube $ABCDEFGH$, lire la décomposition du vecteur $\overrightarrow{DF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Exercice n°14

Dans le cube $ABCDEFGH$, on place le point O centre du rectangle $BFHD$, lire la décomposition du vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Exercice n°15

On considère le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Dans le cube $ABCDEFGH$, démontrer que le triplet $(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BH})$ est bien une base de l'espace.

Exercice n°16

Dans le tétraèdre $ABCD$, démontrer si le triplet $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC})$ est bien une base de l'espace.

Exercice n°17

Donner une représentation paramétrique de la droite (DK) où $D(2;3;0)$ et $K(5;6;1)$.

Exercice n°18

Donner une représentation paramétrique de la droite (CG) où $C(-3;4;-2)$ et $G(-1;-1;2)$.

Exercice n°19

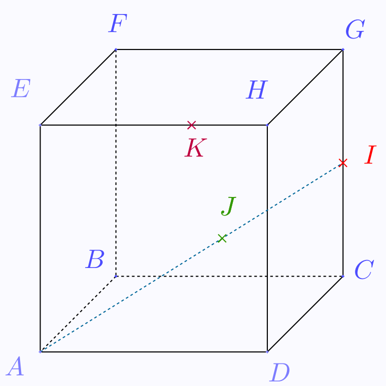
Donner une représentation paramétrique de la droite (NY) où $N(-2;-1;0)$ et $Y(-3;1;-4)$.

Exercice n°20

Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $G(2;9;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice n°21

On considère le cube ABCDEFGH ci-après.



Soit I le milieu de [GC], soit J le point défini par : $\overrightarrow{AJ} = x\overrightarrow{AI}$, où $0 \leqslant x \leqslant 1$, et soit K le point défini par $\overrightarrow{EK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{CJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice n°22

Dans chacune des questions suivantes, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

1. $A(0;2;-1)$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.
2. $A(-3;1;5)$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$.
3. $A(2;-3;4)$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Exercice n°23

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \\ y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}t \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}t' \\ y = t' \\ z = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t' \end{cases} \quad , \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont confondues.

Exercice n°24

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

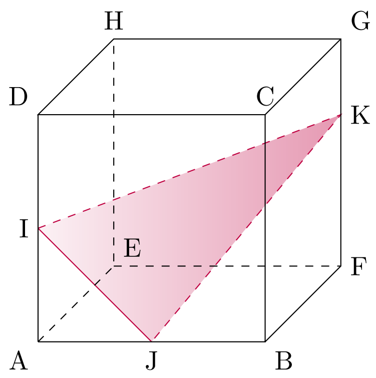
$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 7 + 4t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = -8 - 3t' \\ y = 5 + t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases} \quad , \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont sécantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice n°25

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AB]. On définit les points K et L par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}; \qquad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$$

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ forment une base du plan (IJK).
2. Montrer que $\overrightarrow{IL}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

   Interpréter ce résultat.
3. Le milieu de $[AG]$ appartient-il au plan (IJK) ? Justifier.

Exercice n°26

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -4 - 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases} , \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Sont-elles parallèles ? Sont-elles sécantes ?

Exercice n°27

$ABCD$ est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CD]$.
E et F sont deux points définis par les égalités :

$$-2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0} \qquad ; \qquad -2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}.$$

1. Démontrer que les point E, F, I, J sont coplanaires.
2. La droite (AD) coupe le plan (EFI) en K.
   (a) Démontrer que les points E, I, K sont alignés et que les points F, J, K le sont aussi.
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$.

Exercice n°28

On considère un cube ABCDEFGH et les points milieux I, J et K des segments [AD], [BC] et [FG].

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{HJ}$ dans le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.
2. Existe-t-il deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$?
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice n°29

On considère les droites d et d' données par les représentations paramétriques suivantes.

$$d : \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -k \\ z = -1 + k \end{cases} \qquad \text{et} \qquad d' : \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 2 - h \\ z = 2h \end{cases}$$

où k et h sont réels.

1. Démontrer que les droites d et d' ne sont pas parallèles.
2. Donner deux points A et B de la droite d.
3. Donner deux points C et D de la droite d'.
4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base de l'espace.
5. En déduire la position relative des deux droites.

Exercice n°30

On donne les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;\frac{3}{2})$, $C(-1;3;2)$ et $D(-1;-7;4)$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne forment pas une base de l'espace.

Exercice n°31

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants : $A(-1;0;5)$, $B(2;1;3)$, $C(1;1;1)$, $D(4;-2;1)$ et $E(1;0;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer si le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la position de la droite (DE) et du plan (ABC).

Exercice n°32

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants $A(2;1;5)$, $B(4;2;4)$, $C(3;3;5)$ et $D(0;3;7)$.

1. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
2. Déterminer si le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
3. En déduire la position relative des droites (AB) et (CD).

Exercice n°33

On considère les points $A(1;2;3)$, $B(0;1;2)$ et les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d' passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.
3. Le point $M(6;-8;-2)$ appartient-il aux droites d et d ?
4. Déterminer la position relative des deux droites.

Exercice n°34

On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

1. $\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{array} \right.$.

2. $\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{array} \right.$.

3. $\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{array} \right.$.