3

Corrigés

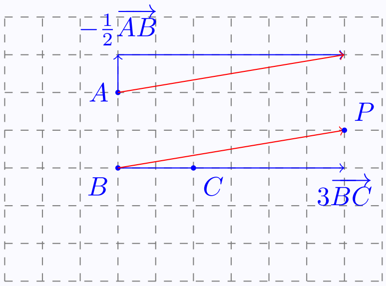
Vecteurs, droites et plans de l'espace

Série d'exercices — Classe : Tle Spé Maths — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

On considère trois points A, B et C non alignés, construire le point P défini par :

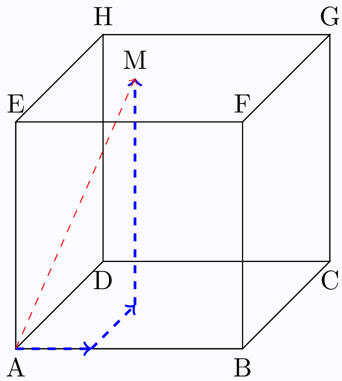
$$\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}.$$



Exercice n°2

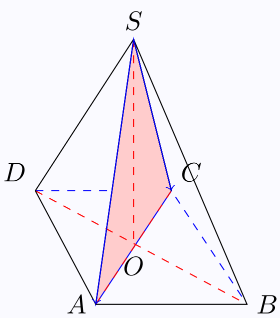
On considère un cube ABCDEFGH, construire le point M défini par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}.$$



Exercice n°3

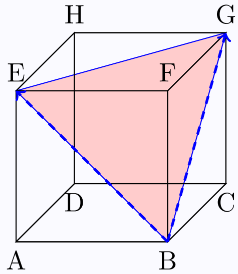
On considère une pyramide $SABCD$ de base le carré $ABCD$ de centre le point O et le point I milieu de la hauteur $[SO]$.



1. Le plan (SAC) est défini par les trois points A, C et S non alignés.
   Le plan (SAC) peut être défini par le point S et les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$.
2. On a, $O \in (AC)$ et $(AC) \subset (SAC)$ donc $O \in (SAC)$.
   De plus, $I \in (SO)$ et $(SO) \subset (SAC)$ donc $I \in (SAC)$.

Exercice n°4

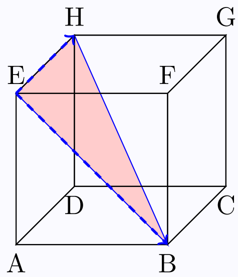
Dans un cube $ABCDEFGH$.



1. Le plan (BEG) peut être défini par le point B et les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$.
2. Le point P le centre de la face $ABFE$ est le point d'intersection des deux diagonales $[AF]$ et $[EB]$.
   Or, $(EB) \subset (BEG)$ donc $P \in (BEG)$.

Exercice n°5

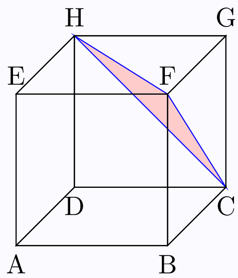
Dans un cube $ABCDEFGH$.



1. Le plan (EHB) peut être défini par le point E et les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EB}$.
2. $EHCB$ est un rectangle donc selon la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EB}$.
   Or, le plan (EHB) est constitué de l'ensemble des points points M tels que $\overrightarrow{EM} = a\overrightarrow{EH} + b\overrightarrow{EB}$, avec a et b des réels.
   Par conséquent, le point C appartient au plan (EHB).

Exercice n°6

Dans le cube ABCDEFGH ;



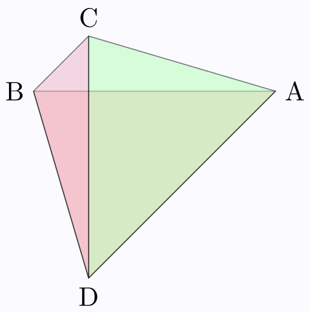
a) (AB) et (FH) ne se coupent pas et ne sont pas parallèles, elles sont donc non coplanaires ;

b) (AF) et (CH) ne se coupent pas et ne sont pas parallèles, elles sont donc non coplanaires ;

c) (CFH) et (AB) sont sécants.

Exercice n°7

Dans le tétraèdre $ABCD$:



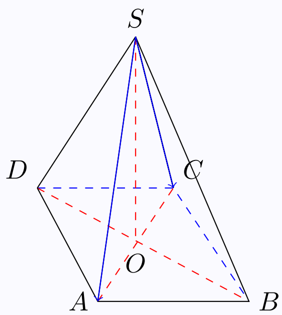
a) (AB) et (CD) sont non coplanaires ;

b) (AC) et (BCD) sont sécants en C ;

c) (AC) et (BD) ne sont pas dans un même plan, elles sont non coplanaires.

Exercice n°8

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré de centre le point O. Déterminer les intersections suivantes.



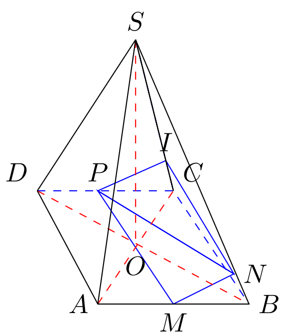
a) (SAB) et (SBC) ont deux points communs S et B, ils sont donc sécants selon la droite (SB).

b) (SAC) et (SBD) ont deux points communs S et O, ils sont donc sécants selon la droite (SO).

c) (SB) et (AC) ne sont pas sécantes et ne sont pas parallèles, elles sont donc non coplanaires.

Exercice n°9

SABCD est une pyramide dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Les points M et N sont sur la face SAB et le point P sur la face SCD.



1. (MNP) et (SAB) ont deux points communs M et N, ils sont donc sécants selon la droite (MN).
   (MNP) et (SCD) ont un point commun P, ils sont donc sécants selon la droite parallèle à (MN) passant par P.

2. On trace la parallèle à (MN) passant par P, elle coupe (SC) en I. Voir la figure. Construire la section du plan (MNP) sur la pyramide.

Exercice n°10

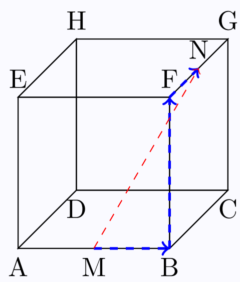
On considère trois points A, B et C non alignés et les points M et N définis par :

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{BA}$.
En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\
&= -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BA} \\
&= -2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB} \\
&= 6\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Exercice n°11

Dans le cube $ABCDEFGH$, M et N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[FG]$.



On sait que, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.
Ainsi, en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FN} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.
\end{aligned}$$

Exercice n°12

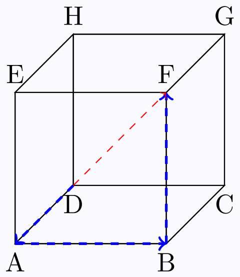
Dans le tétraèdre $ABCD$, I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AD]$.
Selon la règle du parallélogramme, il est assez aisé de voir que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

De plus, J est le milieu de $[AD]$, donc : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
Ainsi, en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.
\end{aligned}$$

Exercice n°13

Dans le cube $ABCDEFGH$, on a : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.

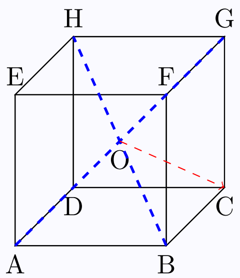


Dès lors, en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\\ \overrightarrow{DF} &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Exercice n°14

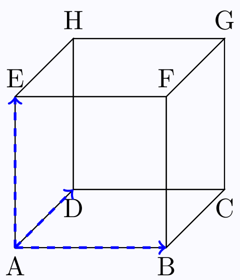
Dans le cube $ABCDEFGH$, le point O centre du rectangle $BFHD$ et donc du cube. Ainsi, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$. De plus, selon la règle du parallélogramme, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.



Dès lors, en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).\end{aligned}$$

Exercice n°15



On considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On a :
$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

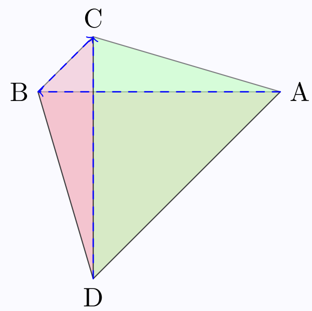
On peut également déterminer les coordonnées des trois vecteurs du triplet $(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BH})$ dans le susdit repère. Ainsi,
$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Raisonnement par l'absurde, supposons que le triplet $(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BH})$ ne forme pas une base de l'espace, autrement dit, il existe deux réels a et b tels que :

$$\begin{aligned}& \overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{BH}\\ \Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases}1 = -a-b\\ 1 = b\\ 1 = a+b\end{cases}.\end{aligned}$$

Ce qui entraine que $1 = 0$. Impossible ! Par conséquent, le triplet $(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BH})$ représente bel et bien une base de l'espace.

Exercice n°16

Dans le tétraèdre $ABCD$, les trois vecteurs du triplet $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC})$ n'appartiennent à un même plan (ils ne sont pas coplanaires), ils forment donc une base de l'espace.



Exercice n°17

La droite (DK) peut être définie par le point D et un vecteur directeur $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}5-3\\6-3\\1-0\end{pmatrix}$.
Une représentation paramétrique de cette droite est donc donnée par :

$$\begin{cases}x = 2+2t\\ y = 3+3t\\ z = 0+t\end{cases} \quad \text{avec,} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°18

La droite (CG) peut être définie par le point C et un vecteur directeur $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}-1-(-3)\\-1-4\\2-(-2)\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de cette droite est alors donnée par :

$$\begin{cases}x = -3+2t\\ y = 4-5t\\ z = 2+4t\end{cases} \quad \text{avec,} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°19

La droite (NY) peut être définie par le point N et un vecteur directeur $\overrightarrow{NY}\begin{pmatrix}-3-(-2)\\1-(-1)\\-4-0\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de cette droite est alors donnée par :

$$\begin{cases}x=-2-t\\y=-1+2t\\z=0-4t\end{cases}\quad \text{avec,}\quad t\in\mathbb{R}.$$

Exercice n°20

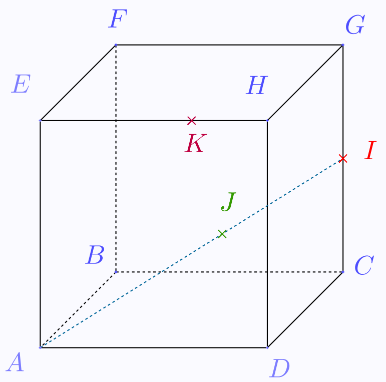
Une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $G(2;9;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, est donnée par :

$$\begin{cases}x=2+t\\y=9-2t\\z=0-t\end{cases}\quad \text{avec,}\quad t\in\mathbb{R}.$$

.

Exercice n°21

On considère le cube ABCDEFGH ci-après.



Soit I le milieu de [GC], soit J le point défini par : $\overrightarrow{AJ}=x\overrightarrow{AI}$, où $0\leqslant x\leqslant 1$, et soit K le point défini par $\overrightarrow{EK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

1. $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}$ (relation de Chasles)
$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$
$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

2. $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AJ}$ (relation de Chasles)
$$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AI}$$
$$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+x\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$
$$\overrightarrow{CJ}=(x-1)\overrightarrow{AB}+(x-1)\overrightarrow{AD}+\frac{x}{2}\overrightarrow{AE}.$$

3. $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AJ}$ (relation de Chasles)
$$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AI}$$
$$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}+x\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$
$$\overrightarrow{KJ}=\left(x-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{2}-1\right)\overrightarrow{AE}.$$

4. $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HK}$
$$\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

Exercice n°22

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. La droite $\mathcal{D}$ passe par le point A de coordonnées $(2\,;-1\,;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(2\,;2\,;1)$.
$\mathcal{P}$ est le plan parallèle à $\mathcal{D}$, passant par les points $B(0\,;1\,;2)$ et $C(-2\,;3\,;2)$.

1. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :
$$\begin{cases}x=2k+2\\y=2k-1\\z=k+1\end{cases}\quad \text{avec, } k\in\mathbb{R}.$$

2. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-2-0\,;3-1\,;2-2)$, c'est-à-dire $(-2\,;2\,;0)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Le plan $\mathcal{P}$ admet donc comme repère $(B\,;\vec{u},\overrightarrow{BC})$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donc :
$$\begin{cases}x=2t-2t'\\y=2t+2t'+1\\z=t+2\end{cases}\quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \text{ et } t'\in\mathbb{R}.$$

3. Le plan $\mathcal{P}'$ est dirigé par le couple de vecteurs de coordonnées $(2\,;2\,;1)$ et $(1\,;0\,;1)$. Le premier vecteur est le vecteur $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(1\,;0\,;1)$ est-il coplanaire à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$? En d'autres termes, existe-t-il deux réels a et b tels que $\vec{v}=a\vec{u}+b\overrightarrow{BC}$?
Cette équation vectorielle donne un système de 3 équations dans $\mathbb{R}$, à deux inconnues a et b :
$$\begin{cases}1=2a-2b\\0=2a+2b\\1=a\end{cases}$$
Ce système n'admet pas de solution.
Le vecteur $\vec{v}$ ne peut pas s'exprimer en fonction de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$, donc le plan $\mathcal{P}'$ ne peut pas être dirigé par ces deux vecteurs. Il n'est donc pas parallèle à $\mathcal{P}$.

Exercice n°23

Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$:

1. $(\mathcal{D}):\begin{cases}x=-t\\y=2+2t\\z=-1-t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$

2. $(\mathcal{D}):\begin{cases} x=-3 \\ y=1-2t \\ z=5+3t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$

3. $(\mathcal{D}):\begin{cases} x=2+t \\ y=-3+2t \\ z=4-3t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$

Exercice n°24

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1):\quad \begin{cases} x=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}t \\ y=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}t \\ z=t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2):\quad \begin{cases} x=\frac{9}{5}+\frac{6}{5}t' \\ y=t' \\ z=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}t' \end{cases}, \quad t'\in\mathbb{R}.$$

D'après leurs représentations paramétriques, $(\mathcal{D}_1)$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3/2\\5/4\\1\end{pmatrix}$ et $(\mathcal{D}_2)$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}6/5\\1\\4/5\end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{v}=\frac{4}{5}\vec{u}$ donc les vecteurs sont colinéaires, ce qui signifie que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont parallèles.

De plus, le point $A\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4};0\right)\in(\mathcal{D}_1)$; vérifions que $A\in(\mathcal{D}_2)$. Pour cela, vérifions que ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de $(\mathcal{D}_2)$:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}=\frac{9}{5}+\frac{6}{5}t' \\ -\frac{1}{4}=t' \\ 0=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}t' \end{cases} \Rightarrow t'=-\frac{1}{4}.$$

On trouve une valeur de t' et une seule ; par conséquent, $A\in(\mathcal{D}_2)$, ce qui signifie alors que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont confondues.

Exercice n°25

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1):\quad \begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-2t \\ z=7+4t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2):\quad \begin{cases} x=-8-3t' \\ y=5+t' \\ z=-1+2t' \end{cases}, \quad t'\in\mathbb{R}.$$

Utilisons la méthode du cours pour montrer que les droites sont sécantes. Montrons que le système :

$$\begin{cases} -2+3t=-8-3t' \\ 1-2t=5+t' \\ 7+4t=-1+2t' \end{cases}$$

admet une unique solution. Pour cela, considérons le système formé uniquement deux deux premières équations :

$$\begin{cases} -2+3t=-8-3t' \\ 1-2t=5+t' \end{cases} \iff \begin{cases} 3t+3t'=-6 \\ -2t-t'=4 \end{cases} \iff \begin{cases} t+t'=-2 \\ t'=-2t-4 \end{cases} \iff \begin{cases} t-2t-4=-2 \\ t'=-2t-4 \end{cases} \iff \begin{cases} t=-2 \\ t'=0 \end{cases}$$

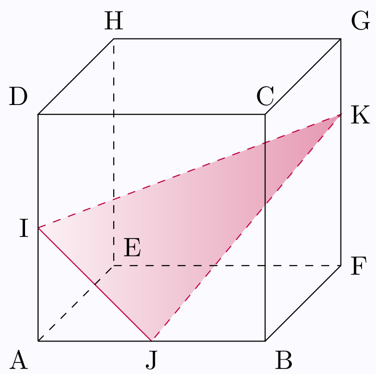
La troisième équation donne alors :

$$7+4t=-1+2t' \iff 7+4\times(-2)=-1+2\times0 \iff -1=-1.$$

Cette dernière égalité étant vraie, $t=-2$ et $t'=0$ sont les solutions du système. Les deux droites sont alors sécantes et leur point d'intersection est obtenu en replaçant par exemple t' par 0 dans la représentation paramétrique de $(\mathcal{D}_2)$: $I(-8;5;-1)$.

Exercice n°26

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AB].
On définit les points K et L par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{\mathrm{GK}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{GF}}; \qquad \overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$$

1. $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une base du plan généré par ces deux vecteurs, le plan (IJK).

2. Une façon de faire est d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ (par exemple).
   - $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
   - $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
   - $\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AL}$
   $$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$$
   $$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

   Si $\overrightarrow{IL}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ alors,

$\exists(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{IL} = \lambda\overrightarrow{IJ} + \mu\overrightarrow{IK} \\
\iff & \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \lambda\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) + \mu\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \\
\iff & \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu\right)\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AE} + \left(-\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\mu\right)\overrightarrow{AD} \\
\iff & \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lambda + \mu \\ 1 = \mu \\ \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\mu \end{cases}
\end{aligned}$$

(les coefficients des vecteurs doivent être égaux un à un)

On trouve alors $\mu = 1$ et par suite, $\lambda = -1$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{IL} = -\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK}}$$

$\overrightarrow{IL}$ est donc bien une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$. On peut alors conclure que le point L est sur le plan (IJK).

3. Notons M le milieu de $[AG]$. Alors,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IM} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{IM}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ alors que d'une part, $\overrightarrow{IJ}$ s'exprime en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ et d'autre part, $\overrightarrow{IK}$ s'exprime en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{IM}$ ne peut donc pas être une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

<u>M n'appartient donc pas au plan (IJK).</u>

Exercice n°27

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -4 - 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

— *Les droites sont-elles parallèles ?*
Pour le savoir, il faut regarder si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
Le vecteur directeur de $(\mathcal{D}_1)$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-5\\1\\-3\end{pmatrix}$ et celui de $(\mathcal{D}_2)$ est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

$$\frac{-5}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

— *Les droites sont-elles sécantes ?*
Pour le savoir, nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} 2 - 5t = 5 + t' \\ -1 + t = -4 - 2t' \\ 4 - 3t = 1 + t' \end{cases}$$

Si on ne considère que les deux premières équations, on a :

$$\begin{cases} 2 - 5t = 5 + t' \\ -1 + t = -4 - 2t' \end{cases} \iff \begin{cases} 5t + t' = -3 \\ t + 2t' = -3 \end{cases} \iff t = -\frac{1}{3}, \quad t' = -\frac{4}{3}.$$

La troisième équation donne alors :

$$4 - 3t = 1 + t' \iff 4 + 1 = 1 - \frac{4}{3} \iff 5 = -\frac{1}{3}.$$

Cette dernière égalité étant fausse, le système n'admet aucune solution et donc les droites ne sont pas sécantes.

Exercice n°28

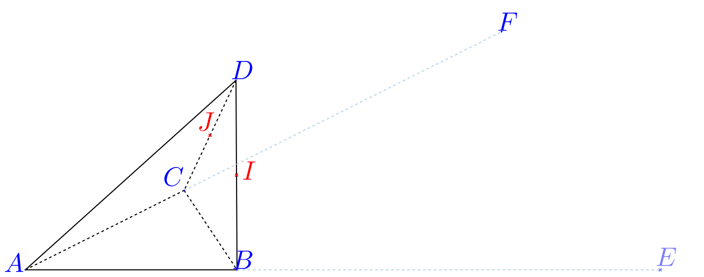
$ABCD$ est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CD]$.
E et F sont deux points définis par les égalités :

$$-2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0} \quad ; \quad -2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}.$$

Avant tout, un schéma peut aider. Pour cela, il faudra savoir comment construire les points E et F : On a

$$\begin{aligned}
-2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0} &\iff -2(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA}) + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB} \\
-2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0} &\iff -2(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CA}) + 3\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \overrightarrow{FC} - 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

alors la figure page suivante.

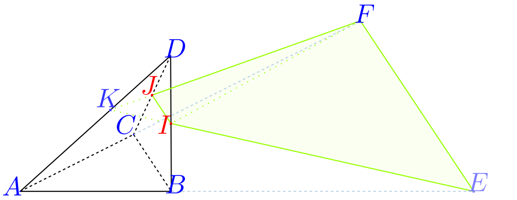


1. Des égalités vectorielles précédentes, on peut conclure :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} \\
&= 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC} \\
&= 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{BC} \\
&= 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \\
&= 3\overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ; les quatre points E, F, B et C sont donc coplanaires.

2. (a) Complétons la figure :



K est défini comme le point d'intersection de la droite (AD) et du plan (EFI) ; par conséquent, toutes droites du plan (EFI) coupant (AD) passe par K.
(AD) appartient au plan (ADC) et la droite (FJ) aussi ; n'étant pas parallèles, elles sont sécantes : en K. Les points F, J et K sont donc alignés.
(AD) appartient au plan (ABD) et la droite (EI) aussi ; n'étant pas parallèles, elles sont aussi sécantes : en K.

(b) Plaçons-nous dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$, où :

$B(1;0;0)$; $D(0;0;1)$; $C(0;1;0)$; $E(3;0;0)$; $F(0;3;0)$

$$I\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2};\frac{z_B+z_D}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$$

$$J\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

— **La droite (JF).**

Un coefficient directeur est $\overrightarrow{JF}\begin{pmatrix}0-0\\3-1/2\\0-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique est donc :

$$(JF)\quad:\quad\begin{cases}x=0+t\times 0\\ y=3+\frac{5}{2}t\\ z=0-\frac{1}{2}t\end{cases}\quad,\quad t\in\mathbb{R}$$

soit :

$$(JF)\quad:\quad\begin{cases}x=0\\ y=3+\frac{5}{2}t\\ z=-\frac{1}{2}t\end{cases}\quad,\quad t\in\mathbb{R}$$

— **La droite (EI).**

Un vecteur directeur est $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}3-1/2\\0-0\\0-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique est donc :

$$(EI)\quad:\quad\begin{cases}x=3+\frac{5}{2}t'\\ y=0+t'\times 0\\ z=0-\frac{1}{2}t'\end{cases}\quad,\quad t\in\mathbb{R}$$

soit,

$$(EI)\quad:\quad\begin{cases}x=3+\frac{5}{2}t'\\ y=0\\ z=-\frac{1}{2}t'\end{cases}\quad,\quad t'\in\mathbb{R}$$

$K\in(EI)$ et $K\in(JF)$ donc :

$$\begin{cases}x_K=0=3+\frac{5}{2}t'\\ y_K=3+\frac{5}{2}t=0\\ z_K=-\frac{1}{2}t=-\frac{1}{2}t'\end{cases}\iff t'=-\frac{6}{5}=t$$

On en déduit alors les coordonnées de K en utilisant par exemple la représentation paramétrique de (EI) :

$$K\left(0;0;\frac{3}{5}\right).$$

Ce qui signifie que $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$.

Exercice n°29

On considère un cube ABCDEFGH et les points milieux I, J et K des segments [AD], [BC] et [FG].

1. Dans le repère $\left(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$, on a :
$$H\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ I\begin{pmatrix}0{,}5\\0\\0\end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ K\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\1\end{pmatrix}\text{ et }J\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0\end{pmatrix}.$$
Ainsi,
$$\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\-1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\1\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{HJ}\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\-1\end{pmatrix}.$$
2. Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}$. Ainsi,
$$\begin{cases}-0{,}5=0{,}5a+0{,}5b\\ 1=a+b\\ 1=-a-b\end{cases}\quad\Rightarrow\quad 1=-1.$$
Impossible ! Ainsi, de tels réels n'existent pas.
3. On déduit alors que les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{HJ}$ sont non coplanaires.

Exercice n°30

On considère les droites d et d' données par les représentations paramétriques suivantes.

$$d:\begin{cases}x=1-2k\\ y=-k\\ z=-1+k\end{cases}\quad\text{et}\quad d':\begin{cases}x=3+h\\ y=2-h\\ z=2h\end{cases}$$

où k et h sont réels.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
$\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d'.
Par ailleurs, $\frac{-2}{1}\neq\frac{-1}{-1}$, donc d et d' ne sont pas parallèles.
2. $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ sont deux points la droite d.

3. $C\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$ sont deux points la droite d'.
4. Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Autrement dit,
$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}.$$
Soit,
$$\begin{cases}-2 = 2a + 3b & L_1\\ -1 = 2a + 2b & L_2\\ 1 = a + 3b & L_3\end{cases}$$
La combinaison linéaire $L_3 - L_1$ entraine $a = -3$.
Et par substitution, on obtient : $b = \frac{4}{3}$ et $b = \frac{5}{2}$. Absurde.
Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non coplanaires, ils forment ainsi une base de l'espace.
5. Les deux doutes (AB) et (CD) ne sont pas parallèles et elles ne se coupent, elles sont donc non coplanaires.

Exercice n°31

On donne les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;\frac{3}{2})$, $C(-1;3;2)$ et $D(-1;-7;4)$.
Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}$. Autrement dit,
$$\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\-7\\2\end{pmatrix}.$$
Soit,
$$\begin{cases}1 = -2a - 2b\\ 1 = 3a - 7b & \text{ce qui entraine que } b = -0.25.\\ -0{,}5 = 2b\end{cases}$$
Et par substitution, on obtient : $a = -0.25$.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, ils ne forment donc pas une base de l'espace.

Exercice n°32

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants : $A(-1;0;5)$, $B(2;1;3)$, $C(1;1;1)$, $D(4;-2;1)$ et $E(1;0;1)$.

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$. Or, $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-2}{-4}$ donc les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. Autrement dit, les points A, B et C sont non alignés, ils définissent ainsi un plan.
2. Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{DE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Autrement dit,
$$\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}.$$
Soit,
$$\begin{cases}-3 = 3a + 2b & L_1\\ 2 = 2a + b & L_2\\ 0 = -2a - 4b & L_3\end{cases}.$$
La combinaison linéaire $L_2 + L_3$ entraine que $b = -1$.
Et par substitution, on obtient : $a = \frac{3}{2}$ et $a = -\frac{5}{3}$. Absurde
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non coplanaires.
3. On déduit alors que la droite (DE) et le plan (ABC) sont sécants.

Exercice n°33

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants $A(2;1;5)$, $B(4;2;4)$, $C(3;3;5)$ et $D(0;3;7)$.

1. On a : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. On constate que : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$. Ainsi, les deux vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CC}$ sont colinéaires. Autrement dit, les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
2. Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD}$. Autrement dit,
$$\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}.$$
Soit,
$$\begin{cases}-2 = 2a - 3b & L_1\\ 2 = a & L_2\\ 2 = -a + 2b & L_3\end{cases}.$$
Par substitution, on obtient : $b = 2$. Ainsi, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$.
Autrement dit, le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
3. D'après la question précédente, les $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires, c-à-d que A, B, C et D appartiennent à un même plan.
Par ailleurs,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AD}\\ &\Leftrightarrow -\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + +2\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$
Ainsi, des droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice n°34

On considère les points $A(1;2;3)$, $B(0;1;2)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

1. Une représentation paramétrique de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, est donnée par :
$$\begin{cases}x = 1 + t\\ y = 2 - 2t\\ z = 3 - t\end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
2. Une représentation paramétrique de la droite d' passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+2t \\ z = 2+2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. En remplaçant x, y et z par les coordonnées de M dans l'équation de d, on obtient :

$$\begin{cases} 6 = 1+t' \\ -8 = 2-2t' \\ -2 = 3-t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Ce qui entraine que : $t = 5$. Ainsi, $M \in d$.

En remplaçant x, y et z par les coordonnées de M dans l'équation de d, on obtient :

$$\begin{cases} 6 = 2t \\ -8 = 1+2t \\ -2 = 2+2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ce qui entraine que : $t = 3$ et $t = -\dfrac{9}{2}$, absurde. Ainsi, $M \notin d'$.

4. $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-2}{2}$ donc les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Soit $I \begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix} \in d \cap d'$. Ainsi,

$$\begin{cases} x_I = 2t = 1+t' \\ y_I = 1+2t = 2-2t' \\ z_I = 2+2t = 3-t' \end{cases}.$$

Dès lors,

$$\begin{cases} 2t - t' = 1 & L_1 \\ 2t+2t' = 1 & L_2 \\ 2t+t' = 1 & L_3 \end{cases}.$$

La combinaison linéaire $L_2 - L_3$ implique $t' = 0$ et donc $t = \dfrac{1}{2}$.

En conséquence les deux droites d et d' sont sécantes au point I de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice n°35

On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
Pour chaque question, déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

1. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ 8y + 7z = 10 \ (L_2) \leftarrow (L_1) + 3(L_2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ y = \frac{5}{4} - \frac{7}{8}z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{11}{4} - \frac{5}{8}z \\ y = \frac{5}{4} - \frac{7}{8}z \end{cases}$

Ainsi, une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{11}{4} - \frac{5}{8}t \\ y = \frac{5}{4} - \frac{7}{8}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

2. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 5y + z = -2 \ (L_2) \leftarrow 2(L_1) - (L_2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = -2 - 5y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 3 + 4y \\ z = -2 - 5y \end{cases}$

Ainsi, une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = -2 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

3. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 4 \\ y + 6z = 2 \ (L_2) \leftarrow (L_1) - (L_2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 4 - \frac{15}{2}z \\ y = 2 - 6z \end{cases}$

Ainsi, une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 4 - \frac{15}{2}t \\ y = 2 - 6t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$