Continuité d'une fonction
Quelques théorèmes

L'essentiel : Tle Spé

Continuité

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.

✧ On dit que f est *continue* en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

✧ On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I.

Fonctions continues de référence

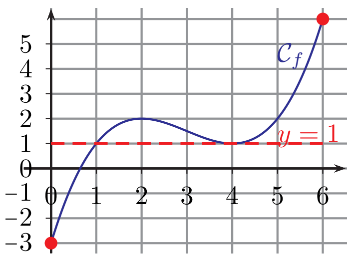
- Les fonctions *polynômes* sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions *rationnelles* sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- La fonction *racine carrée* est continue sur $[0\,;+\infty[$.
- La fonction *exponentielle* est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Propriétés

- Les fonctions obtenues par somme, produit ou quotient de fonctions continues sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.
- Soit $f = v \circ u$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si u est continue sur I et si v est continue sur $u(I)$ alors f est continue sur I.

Théorème des valeurs intermédiaires

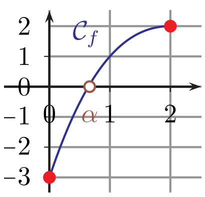
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.



Exemple : La fonction f est continue sur $[0; 6]$.
$f(0) < 1 < f(6)$.
L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions.

Théorème de bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a\,;b]$.

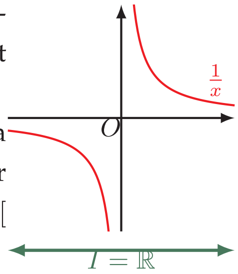


Exemple : La fonction f est continue sur $[0; 2]$.
f est croissante sur $[0, 2]$.
$f(0) < 1 < f(2)$.
L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

Discontinuité

On appelle *point de discontinuité* tout point en lequel une fonction n'est pas continue.

Exemple : La fonction inverse est discontinue en 0, car ses limites en 0 sont infinies.
En effet, la courbe représentative de la fonction inverse n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle l'est sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.



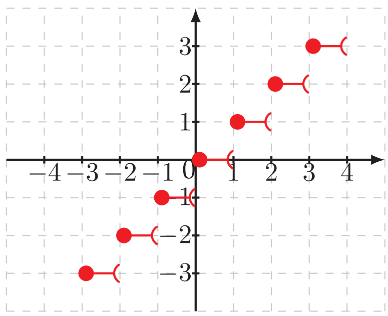
Continuité et tableau de variations

Dans un tableau de variations, un point de discontinuité est représenté par une double barres verticales. Par exemple, pour la fonction inverse, on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Une fonction bien définie n'est pas forcément continue

Une fonction peut être définie sur un intervalle I sans nécessairement être continue sur I.
Exemple : La fonction partie entière $f(x) = E(x) = \lfloor x \rfloor$ est définie en tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.



Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ.
Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 0,8 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$
$f(x) = x^2$.
0 est la limite de u_n et la solution de $f(x) = x$.