Probabilité conditionnelle
Variable aléatoire

L'essentiel : Tle Spé

Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A** le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

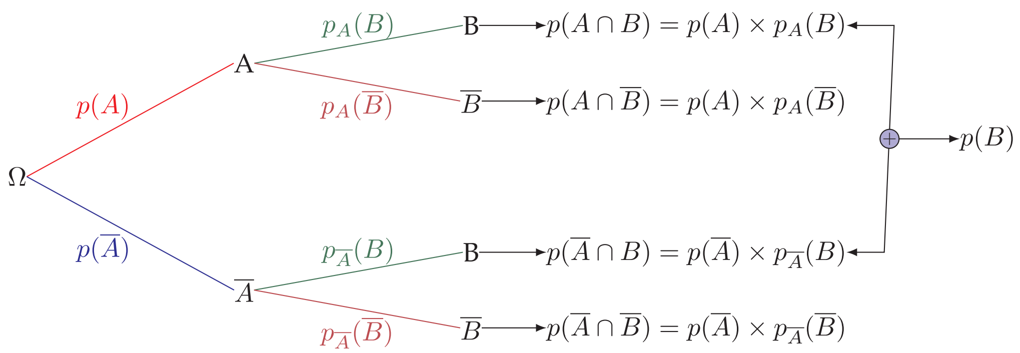
Partition de l'univers

On dit que les n événements A_1, ... , A_n forment une **partition** de Ω si :

- ✧ tous les événements sont incompatibles deux à deux : $A_i \cap A_j = \varnothing$, pour tout $i \neq j$;
- ✧ $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Formule "simple" des probabilités totales

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors, $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$.
On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



Formule des probabilités totales

Soient A_1, A_2, ..., A_n n événements formant une partition de l'univers, avec $p(A_k) \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, pour tout événement B,
$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$.

Indépendance

- ✧ Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** quand $p_B(A) = p(A)$.
- ✧ Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- ✧ A et B sont deux événements **indépendants** alors, A et $\overline{B}$ sont **indépendants**.

Événement contraire

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors, $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.

Variable aléatoire

Soit Ω un univers probabilisé et $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire dans Ω. Une **variable aléatoire** X est une application qui, à chaque événement élémentaires de Ω, associe un nombre réel. Autrement dit, $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète. La **loi de probabilité** de X est la donnée de la probabilité de toutes les valeurs que peut prendre X. En général, elle est donnée sous forme d'un tableau.

Espérance d'une variable aléatoire

On considère X et Y deux variables aléatoires réelles associées à une même expérience sur un univers fini. Soient de plus a et b deux réels, on a :

- ✧ $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- ✧ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- ✧ $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes.

Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.

- ✧ On appelle **variance mathématique** de X le nombre défini par :
  $V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$.
  $V(X) = \sum_{i=1}^{n} \big[x_i - E(X)\big]^2 \times p(X = x_i)$.
  $V(X) = E(X^2) - \big[E(X)\big]^2$.
- ✧ On appelle **écart-type** de X le nombre défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.