Suites numériques

L'essentiel : Tle Spé

Il existe deux façons de définir une suite

- par une relation **explicite** $u_n = f(n)$;
- par une **relation de récurrence** $u_{n+1} = f(u_n)$.

Avec f une fonction bien définie.

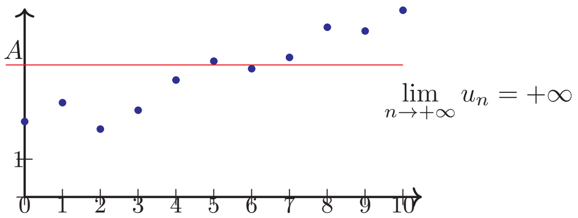
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors :

- $u_{n+1} = u_n + r$;
- $u_n = u_0 + nr$;
- $u_n = u_p + (n-p)r$, pour tout entier naturel p tel que $p \leqslant n$.

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

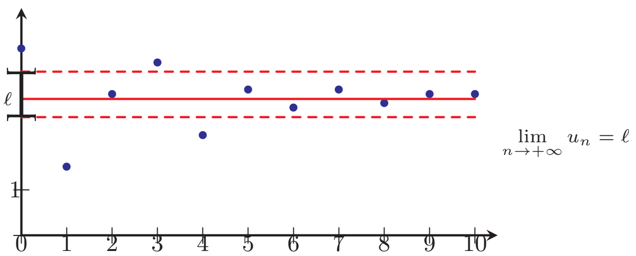
- $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$.
- $u_p + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \dfrac{u_p + u_n}{2}$.

Limite infinie



Pour tout réel $A > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n > A$.

Limite finie



Pour tout intervalle I contenant ℓ, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in I$.

Limites usuelles

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Formes indéterminées

« $\dfrac{\infty}{\infty}$ » « $\infty - \infty$ » « $0 \times \infty$ » « $\dfrac{0}{0}$ »

Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété définie pour tout $n \geqslant m$, $m \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** on justifie que la propriété $P(m)$ est vraie.
- **Hérédité :** on démontre que, si $P(n)$ est vraie pour un certain n, alors $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** on conclut que pour tout entier naturel $n \geqslant m$ la propriété $P(n)$ est vraie.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors :

- $u_{n+1} = q \times u_n$;
- $u_n = u_0 \times q^n$;
- $u_n = u_p \times q^{n-p}$, pour tout entier naturel p tel que $p \leqslant n$.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

- $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- $u_p + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Limite d'une suite géométrique

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q < -1$ alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ est un réel. On suppose que :

- il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

Alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soit n_0 un entier naturel.

- Si, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant u_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si, pour $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Propriétés de convergence d'une suite monotone

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.